Mathematik Sekundarstufe II

Analytische Geometrie und lineare Algebra

Cornelsen
SCHWANN

Mathematik Sekundar-Stufe II

Analytische Geometrie und lineare Algebra

Erarbeitet von
Prof. Dr. Josef Lauter
Dr. Rainer Draaf
Dr. Thomas Jahnke
Wilhelm Kuypers

unter Mitwirkung von
Dr. Gisela Bielig-Schulz
Hans Wuttke

Herausgegeben von
Oberstudiendirektor Wilhelm Kuypers
Professor Dr. Josef Lauter

Cornelsen
SCHWANN

Fotonachweis:
S. 41 Stadtarchiv Aachen
S. 42 Luftbild: Foto-Hauck Mannheim; freigegeben Reg. Präs. Karlsruhe 21/3100 b CN
S. 77, 83, 153 Christoph Berten, Düsseldorf

Für den Gebrauch an Schulen

Bestellnummer 123141
2. Auflage
Druck 6 5 / 92
Alle Drucke derselben Auflage sind im Unterricht parallel verwendbar.

Vertrieb: Cornelsen Verlagsgesellschaft, Bielefeld
Grafik: V. Kiss-Lehne, Aachen
Einbandgestaltung: Nach Entwürfen von Peter J. Kahrl, Neustadt/Wied
Satz und Druck: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
Bindearbeiten: Fritzsche/Ludwig, Berlin

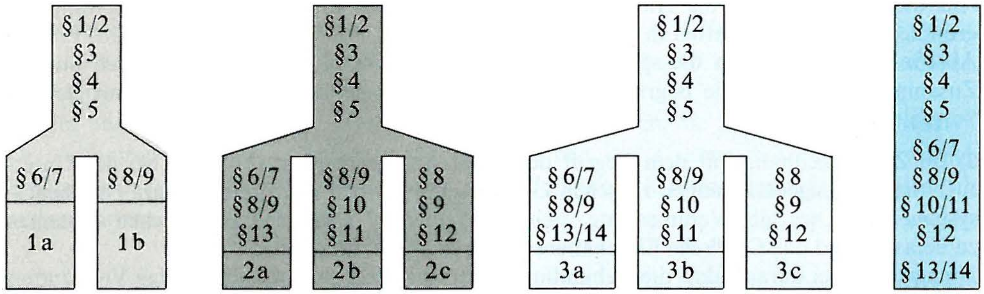
ISBN-3-590-12314-1

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen zum Einsatz des Buches

I. Grundkurse
1) einsemestrig **2) zweisemestrig**

II. Leistungskurse
1) einsemestrig **2) zweisemestrig *)**



An vier Stellen des Buches (jeweils am Ende von § 5, § 9, § 11 und § 12) sind Abschnitte mit **„übergreifenden Aufgaben"** eingefügt. Diese Aufgaben sind durchweg von komplexerem Inhalt und können zur Vorbereitung von Klausuren und auch der Abiturprüfung genutzt werden.

Erläuterungen

Grundstock aller im obigen Diagramm vorgeschlagenen Lehrgänge ist der Inhalt von § 1 – § 5 (Vektoren, ihre Verknüpfungen, der Begriff der linearen Abhängigkeit und die Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen).

Dieser Grundstock wird ergänzt im Kurs

1a) durch die einführende Behandlung **linearer Gleichungssysteme**;
1b) durch die Behandlung des **Skalarprodukts** und seiner Anwendungen;
2a) durch das **Skalarprodukt**, seine Anwendungen und **lineare Gleichungssysteme**;
2b) durch das **Skalarprodukt** und das **Vektorprodukt** mit ihren Anwendungen;
2c) durch das **Skalarprodukt** mit seinen Anwendungen und durch **Kreis** und **Kugel.**

Die Gegenstände der Kurse 2a, b und c sind auch Grundlage für die Leistungskurse 3a, b und c. Doch wird man hier stärker von den Möglichkeiten der Vertiefung und Ergänzung Gebrauch machen, die sowohl im Lehrtext wie in den Aufgaben angeboten werden.
Der Kurs 3a sollte mit der Einführung in die lineare Algebra (§ 14) abgeschlossen werden.

Zu den einzelnen Abschnitten

1) Wie intensiv der Vektorbegriff (§ 1) und die Vektoraddition (§ 2) zu behandeln sind, wird hauptsächlich von den Vorkenntnissen der Schüler abhängen. Wenn die Inhalte dieser Paragraphen bereits Gegenstand des Unterrichts in der Sekundarstufe I gewesen sind, wird man den Inhalt dieser Paragraphen wesentlich kürzer behandeln können, als es im Buch dargestellt ist.

---

*) Wenn man die Möglichkeiten der Vertiefung und der Ergänzung nutzt, reicht der Inhalt des Buches für einen zweisemestrigen Leistungskurs.

2) Eine zentrale Rolle spielt – namentlich in den Paragraphen zu linearen Gleichungssystemen und zur linearen Algebra – der Begriff der **linearen Abhängigkeit** von Vektoren. Dieser Begriff wird in § 4 mit besonderer Sorgfalt herausgearbeitet.
Häufig werden in diesem Zusammenhang zunächst die Sonderfälle kollinearer und komplanarer Vektoren behandelt. Bei einem solchen Weg wird aber das Verständnis für das Wesentliche des Begriffs der linearen Abhängigkeit verstellt durch die Sonderprobleme, die einerseits mit der Dimension und andererseits mit der Anzahl der betrachteten Vektoren zusammenhängen. Aus diesem Grunde ist die Hinführung zu diesem Begriff in § 4, I und die Herleitung der grundlegenden Eigenschaften in § 4, II bewußt von diesen Sonderfragen freigehalten. Erst im Abschnitt § 4, III werden die speziellen Probleme ebener und räumlicher Vektoren und im Zusammenhang damit die Begriffe der Kollinearität und der Komplanarität – mit gleicher Sorgfalt – abgehandelt.

3) Im Zusammenhang mit dem Begriff der linearen Abhängigkeit (§ 4) und bei der Untersuchung von Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen (§ 5) treten **lineare Gleichungssysteme** auf. Dies gibt Veranlassung, sich in § 6 und § 7 eingehend mit solchen Systemen zu befassen und das **Gaußsche Eliminationsverfahren** herauszuarbeiten.
Hingewiesen sei darauf, daß die Behandlung dieser beiden Paragraphen für das Verständnis der späteren Abschnitte zur analytischen Geometrie nicht erforderlich ist.

4) Die Beweise für die beiden Distributivgesetze des Skalar- und insbesondere des Vektorproduktes sind – namentlich bei räumlichen Vektoren – für den Schulunterricht wenig geeignet, wenn sie mit Hilfe der geometrischen Definitionen dieser Produkte geführt werden. Aus diesem Grunde ist die Behandlung beider Produkte so aufgebaut, daß die einschlägigen Gesetze jeweils in relativ einfacher Weise mit Hilfe der Koordinatendarstellungen geführt werden können.

5) Bei der abschließenden Behandlung linearer Gleichungssysteme in § 13 wird konsequent der Begriff der linearen Abhängigkeit auf die Zeilenvektoren der zugehörigen Matrix angewendet. Offen bleibt dabei aber die Frage, ob der Rang einer Matrix bei den Umformungen des Gaußverfahrens erhalten bleibt.
Der letzte Paragraph des Buches (Vektorräume) ist so aufgebaut, daß mit Hilfe der in diesem Paragraphen entwickelten grundlegenden Begriffe und Sätze der linearen Algebra im letzten Satz des Buches (S 14.13) genau diese offene Frage – in einem relativ einfachen Beweis – beantwortet werden kann.

Möglichkeiten der Vertiefung oder Ergänzung

1) § 1,I (Was ist analytische Geometrie?)
2) § 2,II,9. (Satz S 2.9) und § 3,II,7. (Beweis von Satz S 3.6)
3) § 4,II und III (Beweis der Sätze zur linearen Abhängigkeit)
4) § 5,II,6. (Elimination der Parameter in Ebenengleichungen)
5) § 6,III,4. – 6. (erweitertes Gaußverfahren)
6) § 8,III (Basisvektoren); § 8,IV (in Auswahl)
7) § 9,III (in Auswahl); § 9,V (Lotfußpunktverfahren)
8) § 10,I,5. (Herleitung von Satz S 10.1): § 10,I,10. (Drehmoment)
9) § 11,I (Geradengleichungen in Plückerform)
10) § 12,III,5. – 6. (Schnittprobleme bei Kugeln)
11) § 12,IV (Pol, Polare, Polarebene)
12) § 13,III (Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix)
13) § 14,III,5. – 6. (Beweise der Sätze S 14.7 und S 14.8)

§ 1 Vektoren

I. Was ist analytische Geometrie?

1. In der Sekundarstufe I haben wir die Geometrie mit Hilfe von **Grundbegriffen** (wie Punkt, Gerade, Kongruenz) und **Grundsätzen** (Axiomen) aufgebaut. Bei einem solchen Vorgehen spricht man von **„synthetischer Geometrie"**.
Es gibt aber noch eine andere Methode, Geometrie zu treiben, die **„analytische Geometrie"**. Die Anfangsgründe der analytischen Geometrie haben wir – ohne daß dies ausdrücklich erwähnt wurde – ebenfalls schon in der Sekundarstufe I kennengelernt. Dies wollen wir kurz erläutern.

2. Wir wissen, daß man die Punkte einer Ebene in einem Kartesischen Koordinatensystem durch Zahlenpaare erfassen kann (Bild 1.1): jedem Punkt einer Ebene wird umkehrbar eindeutig ein Paar von reellen Zahlen zugeordnet:

$$P \leftrightarrow (x \mid y).$$

Auch die Geraden der Ebene werden durch zwei Zahlen festgelegt, nämlich jeweils durch ihre Steigung m und durch ihren Achsenabschnitt n auf der y-Achse (Bild 1.2).

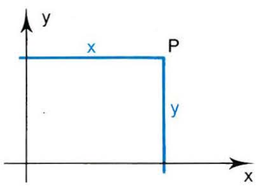


Bild 1.1

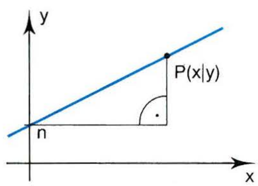


Bild 1.2

Daß ein Punkt $P(x \mid y)$ auf der Geraden g zum Paar $(m \mid n)$ liegt, wird dann erfaßt dadurch, daß die Gleichung

$$y = mx + n$$

für die betreffenden Zahlen x, y, m und n erfüllt ist. Man sagt auch: die Gleichung bringt zum Ausdruck, daß der Punkt $P(x \mid y)$ mit der durch m und n bestimmten Geraden g **inzident** ist.

Bemerkung: Geraden der Ebene, die parallel zur y-Achse verlaufen, werden auf die geschilderte Weise **nicht** erfaßt. Auf dieses Problem gehen wir hier nicht näher ein (Aufgabe 1).

3. Dieses Beispiel zeigt bereits die Grundgedanken der analytischen Geometrie:

$\boxed{1}$ Den **geometrischen Objekten** (z.B. Punkten, Geraden) werden **arithmetische Objekte** (also Zahlen, Zahlenpaare, usw.) eineindeutig zugeordnet.

[2] Den **geometrischen Beziehungen** – z.B. Inzidenz, Kongruenz, Anordnung von Punkten auf einer Geraden – werden **arithmetische Beziehungen** – z.B. Gleichheit, Größerbeziehung von Zahlen – eineindeutig zugeordnet.

[3] Genau dann, wenn zwei **geometrische Objekte** in einer **geometrischen Beziehung** zueinander stehen, dann stehen die zugeordneten **arithmetischen Objekte** in der zugeordneten **arithmetischen Beziehung.**

Wir erläutern dies noch durch die folgenden **Beispiele.**

1) Eine mögliche Lagebeziehung zwischen zwei Geraden g_1 und g_2 ist die **Parallelität:** $g_1 \| g_2$.
Sind die beiden Geraden arithmetisch festgelegt durch die Zahlenpaare $(m_1|n_1)$ und $(m_2|n_2)$, so wird die Parallelität arithmetisch erfaßt durch die Beziehung

$m_1 = m_2$ (Bild 1.3) (Aufgabe 2).

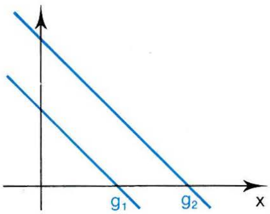


Bild 1.3

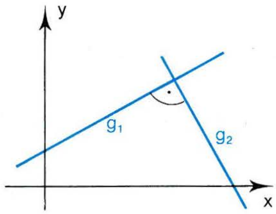


Bild 1.4

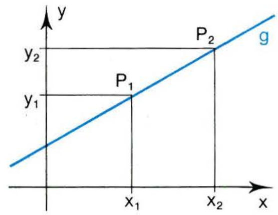


Bild 1.5

2) Eine weitere mögliche Lagebeziehung zwischen zwei Geraden g_1 und g_2 ist das **Senkrechtstehen:** $g_1 \perp g_2$.
Diese geometrische Beziehung wird arithmetisch erfaßt durch die Gleichung

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}, \quad \text{also } m_1 \cdot m_2 = -1 \text{ (Bild 1.4) (Aufgabe 3).}$$

3) Wenn man in Bild 1.5 die Gerade g von „links nach rechts durchläuft", dann kommt man zuerst zum Punkt P_1, dann zum Punkt P_2. Man sagt: der Punkt P_1 liegt – beim gewählten Durchlaufsinn der Geraden – **„vor"** dem Punkt P_2. Diese geometrische Beziehung wird arithmetisch erfaßt durch die Beziehung

$x_1 < x_2$.

Außerdem gilt in diesem Fall – wegen der positiven Steigung der Geraden g – auch

$y_1 < y_2$ (Aufgabe 5).

4. Wesentlich ist nun, daß man in der analytischen Geometrie eine **vollständige arithmetische Beschreibung** der Geometrie erhält.
Der Vorteil der analytischen Methode gegenüber der synthetischen besteht darin, daß man mit Zahlen **rechnen** kann. Jedes geometrische Problem läßt sich in der analytischen Geometrie – wenigstens grundsätzlich – rechnerisch behandeln. In der synthetischen Geometrie gibt es einen Kalkül von vergleichbarer Leistungsfähigkeit nicht.

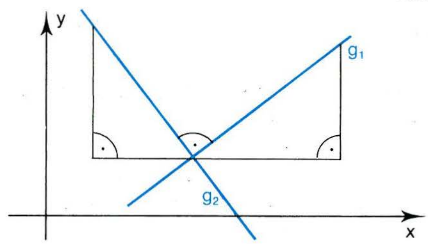
5. Für viele Probleme ist der Kalkül der analytischen Geometrie besonders einfach und leistungsfähig, wenn man den Begriff des **Vektors** heranzieht. Dies hat vor allem den Vorteil, daß die Geometrie des Raumes (des „Raumes R_3") völlig analog zur Geometrie der Ebene (des „Raumes R_2") aufgebaut werden kann. Der Vektorbegriff gestattet es, ohne daß der Aufbau dadurch erschwert würde, sofort **räumliche Geometrie** zu treiben.
Deshalb werden wir uns im folgenden zunächst mit dem Begriff des **Vektors** beschäftigen.

Übungen und Aufgaben

1. a) Warum werden Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, durch Gleichungen der Form $y = mx + n$ nicht erfaßt?
b) Ermittle eine Gleichung für die Parallele zur y-Achse, die durch den Punkt $P(2|5)$ geht!
c) Von welcher Form sind die Gleichungen, durch die **alle** Geraden der Ebene erfaßt werden?

2. a) Begründe, daß die Parallelität zweier Geraden g_1 und g_2 erfaßt wird durch die Bedingung $m_1 = m_2$!
b) Ermittle die Gleichung der Geraden durch den Punkt $P(-2|3)$, die parallel zur Geraden zu $y = \frac{x}{2} - 1$ verläuft!

Bild 1.6



3. a) Begründe, daß das Senkrechtstehen (die Orthogonalität) zweier Geraden g_1 und g_2, die nicht zu den Koordinatenachsen parallel sind, erfaßt wird durch die Bedingung $m_1 \cdot m_2 = -1$ (Bild 1.6)!
b) Warum gilt diese Bedingung nicht für Geraden, die zu den Koordinatenachsen parallel sind?
c) Ermittle die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $P(-4|3)$, die senkrecht zur Geraden zu $y = 2x - 1$ verläuft!

4. Untersuche, wie man bei Geraden, die durch eine Gleichung in allgemeiner Form ($ax + by = c$) gegeben sind, **a)** die Parallelität, **b)** die Orthogonalität arithmetisch erfassen kann! Drücke die Bedingungen so aus, daß sie auch auf Parallelen zur y-Achse anwendbar sind!

5. $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ seien zwei Punkte der Geraden zu $y = mx + n$. Zeige, daß gilt:
a) für $m \geq 0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 \leq y_2$; **b)** für $m \leq 0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 \geq y_2$!
Anleitung: Berechne die Differenz $y_1 - y_2$!

6. a) Warum läßt sich die Beziehung „P_1 liegt vor P_2" bei Punkten auf Parallelen zur y-Achse nicht durch $x_1 < x_2$ definieren?
b) Durch welche Bedingung läßt sich die Ordnungsbeziehung erfassen bei Punkten P_1 und P_2, die auf einer Parallele zur y-Achse liegen?

II. Gerichtete Größen. Geometrische Vektoren

1. Auch heute noch sind an Flüssen zahlreiche Fähren im Einsatz, die Personen, Fahrzeuge und andere Güter von einem Ufer zum anderen befördern. Wie muß die Fähre von Bild 1.7 gesteuert werden, damit sie vom Punkt A zum Punkt B gelangt? Würde der Steuermann beim Start in A unmittelbar den Zielpunkt B ansteuern, also in Richtung des Pfeils $\overrightarrow{AB}$ fahren, so würde das Schiff unter dem Einfluß der Strömung nicht beim Punkt B ankommen; es würde vielmehr stromabwärts abgetrieben und das gegenseitige Ufer vielleicht beim Punkt C erreichen.

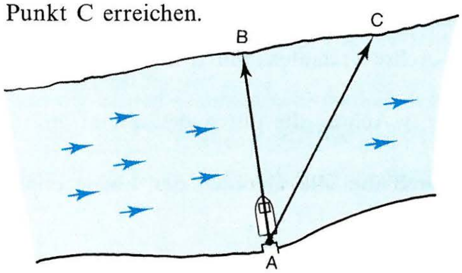


Bild 1.7

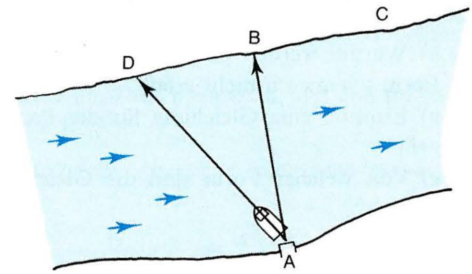


Bild 1.8

Um beim Punkt B anzukommen, muß der Fährmann vielmehr einen Punkt D links von B ansteuern (Bild 1.8); denn dann wird die Fähre unter dem Einfluß der Strömung bis zum Zielpunkt B abgetrieben.

Man kann den Sachverhalt beschreiben mit Hilfe der Geschwindigkeit der Strömung und der Eigengeschwindigkeit der Fähre. Offensichtlich kommt es dabei aber nicht nur auf den Betrag, die Größe der beiden Geschwindigkeiten, sondern wesentlich auch auf deren **Richtung** an.

In Bild 1.9 sind die **Eigengeschwindigkeit** der Fähre $\vec{v}_E$, die **Strömungsgeschwindigkeit** $\vec{v}_S$ und die sich daraus ergebende **Gesamtgeschwindigkeit** $\vec{v}$ durch Pfeile dargestellt. Dabei wird der Betrag, die Größe jeder Geschwindigkeit durch die Länge des betreffenden Pfeils erfaßt. Man schreibt:

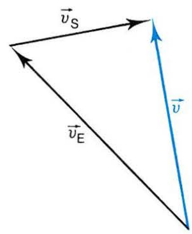


Bild 1.9

$$\vec{v}_E + \vec{v}_S = \vec{v}.$$

Geschwindigkeiten sind also **gerichtete Größen,** die man durch Pfeile darstellen kann. Unterliegt ein Körper – wie die Fähre unseres Beispiels – dem Einfluß mehrerer Geschwindigkeiten, so überlagern sich diese Geschwindigkeiten zu einer Gesamtgeschwindigkeit, die man durch Aneinanderlegen der zugehörigen Pfeile wie in Bild 1.9 ermitteln kann.

2. Ähnlich ist die Situation auch bei anderen physikalischen Größen, die durch Pfeile dargestellt werden können, z.B. bei Kräften. Aber auch im Mathematikunterricht haben wir schon mit **Pfeilen** gearbeitet. Wir haben sie benutzt

1) zur Veranschaulichung von Zahlen und

2) zur Kennzeichnung von Verschiebungen.

Unter einer **Verschiebung** versteht man eine spezielle **Abbildung,** bei der jedem Punkt A (der Ebene oder des Raumes) eindeutig ein Punkt A′ zugeordnet wird.

Beispiel:

Das Dreieck ABC von Bild 1.10 wird durch eine Verschiebung V auf das Dreieck A′B′C′ abgebildet. Diese Verschiebung V wird z.B. durch den Pfeil $\overrightarrow{AA'}$ gekennzeichnet.

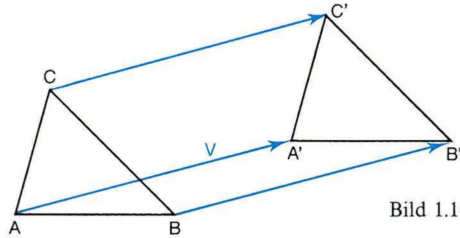


Bild 1.10

Bemerkung: Man kann einen Pfeil $\overrightarrow{AA'}$ auffassen

a) als die mit einer Orientierung, einem Richtungssinn versehene Strecke AA′ oder

b) als das (geordnete) Punktepaar (A|A′).

In beiden Fällen kommt es auf die Reihenfolge der beiden Punkte an. Der Pfeil $\overrightarrow{A'A}$ kennzeichnet die Verschiebung, durch die der Punkt A′ auf den Punkt A abgebildet wird; der Pfeil $\overrightarrow{A'A}$ kennzeichnet also eine andere Verschiebung als der Pfeil $\overrightarrow{AA'}$. Wir nennen A den **„Anfangspunkt"** und A′ die **„Spitze"** des Pfeils $\overrightarrow{AA'}$.
Man kann die Verschiebung V von Bild 1.10 aber auch kennzeichnen durch die Pfeile $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, usw. Alle diese Pfeile sind **gleichlang, zueinander parallel** und **gleichorientiert;** man sagt kurz: diese Pfeile sind **„vektorgleich".**
Beachte: Wenn Pfeile nicht zueinander parallel sind, hat es keinen Sinn, ihre Orientierung miteinander zu vergleichen!

3. Aufgrund der vorstehenden Überlegungen definieren wir:

D 1.1 Zwei Pfeile heißen „vektorgleich" genau dann, wenn sie gleichlang, parallel und gleichorientiert sind.

Man faßt nun alle vektorgleichen Pfeile zu einer Menge zusammen und nennt diese Menge einen **„Vektor"**, genauer einen **„geometrischen Vektor".** Wir definieren:

D 1.2 Unter einem Vektor versteht man die Menge aller zu einem Pfeil vektorgleichen Pfeile.

Wir bezeichnen Vektoren in der Regel durch kleine lateinische Buchstaben mit einem darüber gesetzten Pfeil:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$; gelesen „Vektor a", „Vektor b" usw.

Da ein Vektor eine Menge von Pfeilen ist, können wir – genaugenommen – einen Vektor nicht zeichnen. Zur Veranschaulichung von Vektoren zeichnen wir einzelne Pfeile, die zu dem betreffenden Vektoren gehören (Bild 1.11). Jeder solche Pfeil „vertritt" seinen Vektor; wir nennen ihn daher auch einen **„Vertreter"** oder **„Repräsentanten"** seines Vektors. Für die Pfeile von Bild 1.11 gilt also: $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$; $\overrightarrow{CD} \in \vec{a}$; $\overrightarrow{EF} \in \vec{a}$.

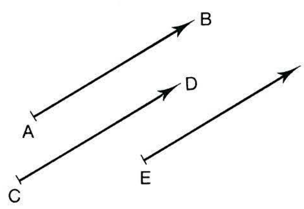


Bild 1.11

Beachte:

1) Zur Unterscheidung von Pfeilen und Vektoren bezeichnen wir **Pfeile** durch ihre Endpunkte, also z.B. mit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, usw., **Vektoren** dagegen mit kleinen lateinischen Buchstaben, also z.B. mit $\vec{a}$, $\vec{b}$, usw.

2) Wird in einer Zeichnung ein Vektor $\vec{a}$ durch einen seiner Repräsentanten $\overrightarrow{AB}$ dargestellt, so schreiben wir an den Pfeil das Zeichen „$\vec{a}$"; dies deutet also an, daß dieser Pfeil als Vertreter seines Vektors aufzufassen ist.

3) Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, bezeichnet man gelegentlich auch den zu einem Pfeil $\overrightarrow{AB}$ gehörenden Vektor $\vec{a}$ der Einfachheit halber ebenfalls mit „$\overrightarrow{AB}$".

4. Wir fassen die Vektoren des dreidimensionalen Raumes R_3 zu einer Menge zusammen und bezeichnen diese mit „$\mathbf{V_3}$". Entsprechend bezeichnen wir die Menge aller Vektoren, deren Repräsentanten in einer Ebene, also im Raum R_2 liegen, mit „$\mathbf{V_2}$" und die Menge der Vektoren, deren Repräsentanten alle auf einer Geraden liegen, mit „$\mathbf{V_1}$".
Wollen wir offenlassen, um welche Vektormenge es sich handelt, schreiben wir kurz „**V**".

5. Schließlich wollen wir noch vereinbaren, daß wir die Begriffe „Länge", „Parallelität" und „Orientierung" nicht nur für Pfeile, sondern auch für die zugehörigen Vektoren verwenden wollen:

1) Unter dem **„Betrag eines Vektors"** verstehen wir die Maßzahl der Länge seiner Repräsentanten. Wir bezeichnen den Betrag eines Vektors $\vec{a}$ mit „$|\vec{a}|$", gelesen „Vektor a Betrag" oder „Betrag des Vektors a".
Beachte, daß $|\vec{a}|$ eine **Zahl,** nicht etwa eine Größe ist, die sich aus Maßzahl und Maßeinheit zusammensetzt!

2) Sind die Repräsentanten zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander **parallel** (liegen diese also in zueinander parallelen Geraden), so schreiben wir:

„$\vec{a} \parallel \vec{b}$", gelesen „Vektor a parallel Vektor b" (Bild 1.12).

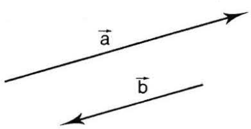


Bild 1.12

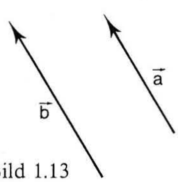


Bild 1.13

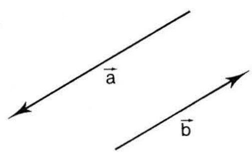


Bild 1.14

3) Sind die Repräsentanten zweier zueinander parallelen Vektoren **gleichorientiert,** so schreiben wir:

„$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$", gelesen „Vektor a gleichorientiert mit Vektor b" (Bild 1.13);

sind sie dagegen **entgegengesetzt orientiert,** so schreiben wir:

„$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$", gelesen „Vektor a entgegengesetzt orientiert zu Vektor b" (Bild 1.14).

Beachte: Die Schreibweisen „$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$" und „$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$" haben nur Sinn, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander **parallel** sind!

Übungen und Aufgaben

1. Benenne die Pfeile und die Vektoren, die durch die Kanten folgender Körper festgelegt sind und entscheide, welche von Ihnen vektorgleich sind!
a) Prisma (Bild 1.15) **b)** Würfel **c)** Quader **d)** Pyramide (Bild 1.16)
e) Tetraeder (Bild 1.17) **f)** Parallelflach (Bild 1.18)

Bemerkung: Ein **Parallelflach** (oder „**Spat**") ist ein von sechs ebenen Seitenflächen begrenzter Körper, bei dem die beiden gegenüberliegenden Seitenflächen jeweils zueinander parallel sind.

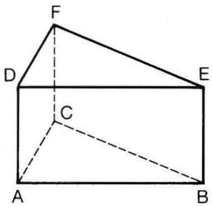


Bild 1.15

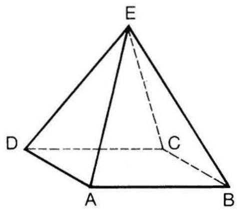


Bild 1.16

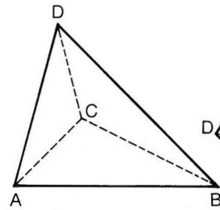


Bild 1.17

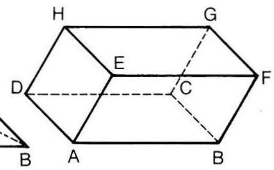


Bild 1.18

2. Durch den Pfeil $\overrightarrow{AA'}$ ist in einem Kartesischen Koordinatensystem eine Verschiebung V festgelegt (Bild 1.10 auf Seite 11). Zeichne jeweils den Bildpunkt B′ zum Punkt B!
a) $A(-1|2)$; $A'(2|0)$; $B(0|0)$ **b)** $A(1|-2)$; $A'(-1|3)$; $B(3|0)$

3. Ermittle zu den Verschiebungen von Aufgabe 2 jeweils den Originalpunkt C zum Bildpunkt C′! **a)** $C'(3|1)$ **b)** $C'(1|4)$ **c)** $C'(4|-1)$ **d)** $C'(1|3)$

4. Wo liegen die Spitzen von Pfeilen, die den gleichen Anfangspunkt A haben und übereinstimmen in **a)** Länge, **b)** Richtung, **c)** Richtung und Orientierung?

5. Mit wie vielen verschiedenen Vektoren lassen sich beim Quader erfassen
a) alle Flächendiagonalen und **b)** alle Raumdiagonalen?

6. Die Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_E$ eines Flugzeugs und die Windgeschwindigkeit $\vec{v}_W$ setzen sich zur „Geschwindigkeit über Grund" $\vec{v}$ vektoriell zusammen. Um nicht vom Zielkurs abzukommen, steuert der Pilot das Flugzeug mit einem Vorhaltewinkel von 8°. Es gilt $|\vec{v}_E| = 180$ km/h und $|\vec{v}_W| = 36$ km/h, wobei der Wind schräg von hinten bläst.
Ermittle zeichnerisch $|\vec{v}|$ und die Größe des Winkels zwischen $\vec{v}$ und $\vec{v}_W$!

7. a) Eine Fähre überquert eine Meerenge von A nach B. Die Strömung treibt das Schiff senkrecht zur Richtung von A nach B mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ vom Betrage $|\vec{v}_S| = 5$ kn[1]) ab. Die Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_E$ der Fähre beträgt $|\vec{v}_E| = 15$ kn. Ermittle zeichnerisch die Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}$ und aus der Zeichnung $|\vec{v}|$ sowie die Größe des Winkels zwischen $\vec{v}_E$ und $\vec{v}$, des sogenannten „Vorhaltewinkels"!
b) Ein zweites Schiff fährt mit einem Vorhaltewinkel von 30° über die Meerenge. Ermittle zeichnerisch $\vec{v}_E$, $\vec{v}$ und deren Beträge!

[1]) „Knoten" ist ein nautisches Geschwindigkeitsmaß: $1\,\text{kn} = 1852\,\frac{\text{m}}{\text{h}}$.

8. Ein Segelflugzeug fliegt mit einer waagerechten Eigengeschwindigkeit von 25 m/s nach SW. An einem Aufhang wird es mit 8 m/s senkrecht nach oben getragen und gleichzeitig von einem Sturmwind aus NW mit 12 m/s seitlich abgetrieben.

a) Stelle die beteiligten Geschwindigkeitsvektoren in einem Schrägbild dar!

b) Berechne die Beträge der Gesamtgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit über Grund mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras!

III. Erfassung von Vektoren durch Zahlen

1. Schon in der 6. Klasse haben wir ebene Pfeile und Vektoren mit Hilfe von Zahlen dargestellt. Dabei haben wir ein Kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt (Bild 1.19). Bisher haben wir die Koordinaten eines Punktes P allgemein mit den Variablen x und y bezeichnet. Für die folgenden Überlegungen ist es jedoch gelegentlich zweckmäßig, für die beiden Koordinaten denselben Buchstaben zu wählen wie für den Punkt selbst und diese Koordinaten durch Indizes zu unterscheiden.

Wir schreiben also gelegentlich z.B.

$$A(a_1|a_2); \quad B(b_1|b_2); \quad \text{usw.}$$

Daher bezeichnen wir die beiden Achsen bei allgemeinen Überlegungen auch als x_1-Achse und x_2-Achse. Bei Beispielen verwenden wir dagegen in der Regel die üblichen Bezeichnungen x-Achse und y-Achse.

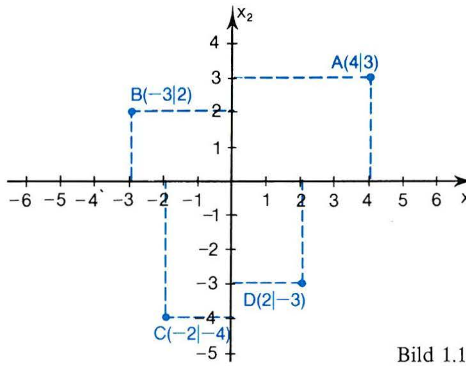


Bild 1.19

2. Im Raum besteht ein Kartesisches Koordinatensystem aus drei Zahlengeraden, die paarweise aufeinander senkrecht stehen und auf denen mit der gleichen Einheit gemessen wird. Auch hier bezeichnen wir die drei Achsen bei allgemeinen Überlegungen als x_1-, x_2- und x_3-Achse, bei einzelnen Beispielen aber meist als x-, y- und z-Achse. Es gibt zwei grundsätzlich zu unterscheidende Möglichkeiten für die Lage der Achsen zueinander. Wenn man sich Bild 1.20 so vorstellt, daß die x-Achse (x_1-Achse) „nach vorne" weist, dann bilden die drei Achsen ein sogenanntes **„Rechtssystem"**. Bild 1.21 hat man sich so vorzustellen, daß die x-Achse (x_1-Achse) „nach hinten" weist; in diesem Falle bilden die drei Achsen ein **„Linkssystem"**.

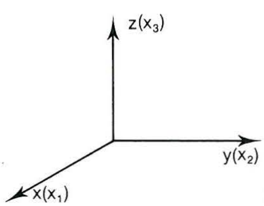


Bild 1.20

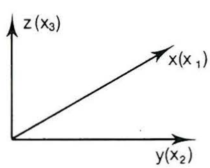


Bild 1.21

Man kann den Unterschied dieser beiden **„Orientierungen"** eines Koordinatensystems nur anschaulich, z.B. mit Hilfe der sogenannten **„Korkenzieherregel"** erklären. Denkt man sich im Nullpunkt des Koordinatensystems einen (handelsüblichen, also rechtsgewundenen) Korkenzieher angesetzt und dreht diesen über den kleineren Winkel (in diesem Fall also über den rechten Winkel) von der positiven x-Richtung zur positiven y-Richtung, so bewegt sich der Korkenzieher bei einem Rechtssystem in Richtung der positiven z-Achse (Bild 1.22). Bei einem Linkssystem würde er sich in Richtung der negativen Seite der z-Achse bewegen. Wir legen in diesem Buche stets ein **Rechtssystem** zugrunde.

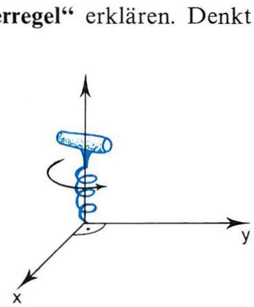


Bild 1.22

Bemerkung: Bei der ebenen Darstellung eines räumlichen Koordinatensystems ist es zweckmäßig, die positive x-Achse unter einem Winkel von 135° gegenüber der positiven y-Achse zu zeichnen. Auf kariertem Papier legt man die y- und die z-Achse auf die Gitterlinien; die x-Achse verläuft dann in Richtung der Diagonalen der Gitterquadrate. Wählt man auf der y- und der z-Achse die Seitenlänge eines Gitterquadrates als Einheit, so ist es für die x-Achse (z.B.) zweckmäßig, eine halbe Diagonalenlänge als Einheit festzulegen.

Jedem Punkt des Raumes ist dann eineindeutig ein **Tripel** reeller Zahlen, ein **Koordinatentripel** zugeordnet. Bild 1.23 zeigt dies für den Punkt $A(3|5|7)$ und Bild 1.24 für den Punkt $B(-3|3|-5)$. Die beiden Bilder zeigen außerdem, daß es zu den Punkten A und B jeweils einen Quader mit dem betreffenden Punkt als Eckpunkt gibt, von dem drei Kanten auf den Koordinatenachsen und drei Seitenflächen in den Koordinatenebenen liegen. Dies gilt entsprechend für jeden Punkt des Raumes, dessen Koordinaten alle von 0 verschieden sind.

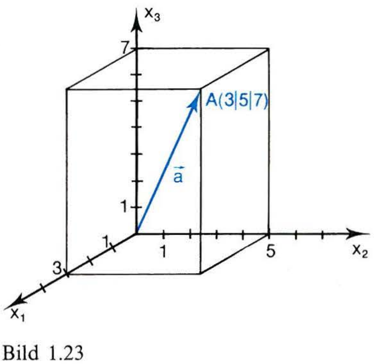


Bild 1.23

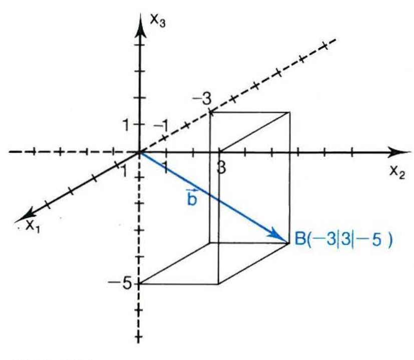


Bild 1.24

Mit Hilfe des betreffenden Quaders kann man, wenn ein Punkt gegeben ist, dessen Koordinaten bestimmen und auch umgekehrt, wenn ein Koordinatentripel gegeben ist, den zugehörigen Punkt finden. Für die Koordinaten von Raumpunkten verwenden wir in allgemeinen Überlegungen ebenfalls die Schreibweise mit Hilfe von Indizes. Wir schreiben also z.B. $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ usw. Häufig benutzen wir z.B. aber auch die Schreibweise $P(x|y|z)$.

3. Die Ebene wird durch ein Kartesisches Koordinatensystem in vier Quadranten eingeteilt. Entsprechend bewirkt ein solches Koordinatensystem im Raum eine Unterteilung in **acht Oktanten** (Bild 1.25). Oberhalb der x-y-Ebene liegen die Oktanten I, II, III und IV, unterhalb der x-y-Ebene die Oktanten V, VI, VII und VIII.

Beispiele:

P(1|4|4) liegt im I. Oktanten,
Q(−4|2|1) liegt im II. Oktanten,
R(−3|5|−2) liegt im VI. Oktanten,
S(4|−2|−3) liegt im VIII. Oktanten.

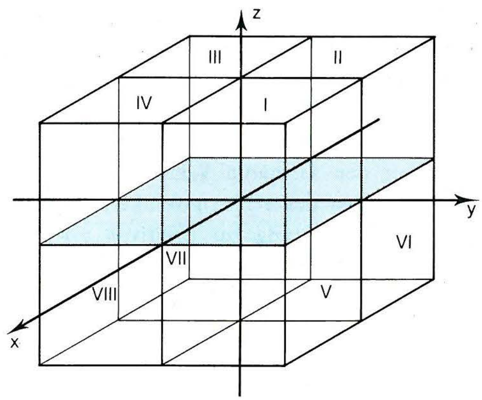


Bild 1.25

4. Um auch Vektoren durch Zahlen erfassen zu können, wählt man als Vertreter eines Vektors den Pfeil, der am Nullpunkt des Koordinatensystems angetragen ist und ordnet dem Vektor als Koordinaten die Punktkoordinaten der Spitze dieses Pfeils zu. Man schreibt die Koordinaten eines Vektors in der Regel allerdings nicht neben-, sondern untereinander, also in Form einer „Spalte" mit runden Klammern.

Für die Vektoren von Bild 1.26 gilt demnach:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix};\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix};\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix};\quad \vec{d}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}.$$

Allgemein bezeichnen wir auch die Koordinaten eines Vektors mit demselben Buchstaben wie den Vektor und mit Hilfe von Indizes, also z.B.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix};\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix};\quad \text{usw.}$$

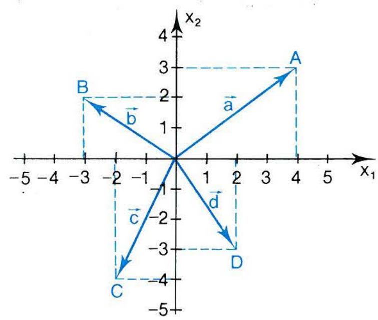


Bild 1.26

Wir nennen Vektoren mit zwei Koordinaten gelegentlich auch **„ebene Vektoren"**.
Für die Vektoren in den Bildern 1.23 und 1.24 gilt:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-5\end{pmatrix}.$$

Allgemein bezeichnen wir auch hier die Koordinaten mit Hilfe von Indizes, also:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix};\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix};\quad \text{usw.}$$

Wir nennen Vektoren mit drei Koordinaten gelegentlich auch **„räumliche Vektoren"**.

5. Wählt man statt des am Nullpunkt angetragenen Pfeils $\overrightarrow{OA}$ einen anderen Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ als Vertreter eines Vektors $\vec{a}$, so kann man die Koordinaten von $\vec{a}$ als Differenzen der Punktkoordinaten von Q und P bestimmen. Wir zeigen dies an einem einfachen ebenen

__Beispiel__ (Bild 1.27):

Die Pfeile $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{PQ}$ sind beide Vertreter eines Vektors $\vec{a}$. Die Punkte sind: $A(3|2)$; $P(2|4)$ und $Q(5|6)$. Die Punktkoordinaten von A stimmen mit den Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ überein:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

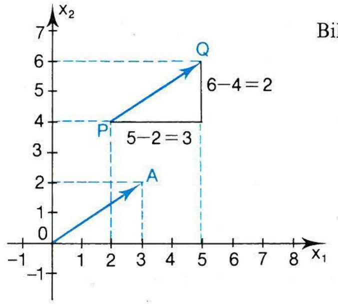


Bild 1.27

Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn man die Differenzen der entsprechenden Koordinaten von Q und P bildet.

$$\begin{pmatrix}5-2\\6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\vec{a}.$$

Allgemein können wir sagen:

S 1.1 **1) Sind $P(p_1|p_2)$ und $Q(q_1|q_2)$ zwei Punkte der Ebene und ist der Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{a}$, so gilt:**

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}.$$

2) Sind $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$ zwei Punkte des Raumes und ist der Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ ein Vertreter des Vektors $\vec{a}$, so gilt:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\\q_3-p_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$

__Beispiel:__ $P(-4|3|3)$; $Q(3|-2|-5)$; dann ist $\vec{a}=\begin{pmatrix}3-(-4)\\-2-\ 3\\-5-\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-5\\-8\end{pmatrix}.$

Beachte, daß die Aussage von Satz S 1.1 auch gilt, wenn P der Nullpunkt des Koordinatensystems ist!

6. Im II. Abschnitt haben wir erläutert, daß man unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ (geschrieben: $|\vec{a}|$) die Längenmaßzahl seiner Repräsentanten versteht. Bild 1.28 zeigt einen Pfeil $\overrightarrow{OA}$ als Vertreter eines ebenen Vektors $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$.

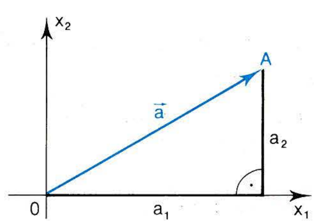


Bild 1.28

Nach dem Lehrsatz des Pythagoras gilt für die Längenmaßzahl des betreffenden Pfeils und somit für $|\vec{a}|$:

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Daraus ergibt sich:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Dieses Ergebnis gilt auch, wenn einzelne Koordinaten negativ sind oder den Wert 0 haben (Aufgabe 8).

Beispiel: Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

7. Eine entsprechende Formel gilt auch für räumliche Vektoren. Bild 1.29 zeigt einen Pfeil $\overrightarrow{OA}$ als Vertreter eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Für die Längenmaßzahl b der Strecke OB gilt:

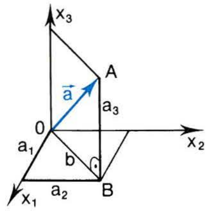


Bild 1.29

$$b^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Da das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist, ergibt sich durch nochmalige Anwendung des Lehrsatzes von Pythagoras:

$$|\vec{a}|^2 = b^2 + a_3^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Daraus folgt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Beachte, daß dieses Ergebnis auch gilt, wenn einzelne Koordinaten negativ sind oder den Wert 0 haben (Aufgabe 8)!

Beispiel: Für $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ 3{,}5 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{b}| = \sqrt{(-2{,}1)^2 + 3{,}5^2 + 1{,}8^2} = \sqrt{19{,}90} \approx 4{,}46.$

Wir fassen zusammen:

S 1.2 Für den Betrag ebener bzw. räumlicher Vektoren gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \textbf{bzw.} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

8. Im Vorstehenden haben wir gesehen, daß man geometrische Vektoren durch Zahlenpaare bzw. durch Zahlentripel darstellen, erfassen kann. Zahlenpaare und Zahlentripel sind **geordnete** Mengen von 2 bzw. 3 Zahlen. Solche geordneten Zahlenmengen (auch von 4, 5 und noch mehr Zahlen) treten nicht nur in dem hier geschilderten geometrischen Zusammenhang auf; sie werden vielmehr in vielen anderen Gebieten des täglichen Lebens, z.B. im Wirtschaftsleben, zur Beschreibung von Situationen verwendet.

Beispiel:

Eine Getränkefirma liefert vier Sorten von Erfrischungsgetränken: Mineralwasser, Fruchtsaft, Orangenlimonade und Zitronenlimonade. Bei der Tagesbilanz wird jeden Abend der jeweilige Lagerbestand dadurch erfaßt, daß die Anzahlen der vier Sorten spaltenweise untereinandergeschrieben werden, also in Form von Zahlenquadrupeln, z.B.

1.8.	**2.8.**	**3.8.**	**4.8.**
$\begin{pmatrix} 23400 \\ 18750 \\ 21880 \\ 17640 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21200 \\ 16800 \\ 17900 \\ 13450 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19300 \\ 14480 \\ 15740 \\ 12710 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 22900 \\ 16750 \\ 19430 \\ 16250 \end{pmatrix}$

Auch jedes solche Zahlenquadrupel nennt man einen **Vektor.**
Entsprechend können auch die tägliche Auslieferung und der Nachschub aus der Produktion durch solche Zahlenquadrupel, also durch Vektoren mit vier Koordinaten, beschrieben werden.

9. An den behandelten Beispielen haben wir gesehen, daß Vektoren auch unmittelbar als Zahlenpaare, Zahlentripel, allgemein als sogenannte „Zahlen-n-Tupel" gegeben sein können. Wir definieren:

D 1.3 **Unter einem Vektor mit n Koordinaten ($n \in \mathbb{N}$) versteht man ein Zahlen-n-Tupel. Man schreibt:**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (\text{mit } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}).$$

Die Menge aller Vektoren mit genau n Koordinaten bezeichnen wir mit **„V_n"**.
Zur Unterscheidung von Vektoren als Pfeilmengen (Definition D 1.2) werden wir solche Zahlen-n-Tripel gelegentlich als **„arithmetische Vektoren"** und Pfeilmengen als **„geometrische Vektoren"** bezeichnen.

Übungen und Aufgaben

1. In welchen Oktanten liegen die folgenden Punkte?
$A(-1|3|-2)$; $B(-4|5|1)$; $C(3|-1|4)$; $D(-5|-2|-4)$; $E(4|-2|-5)$; $F(-1|-3|4)$; $G(4|5|-3)$; $H(2|5|1)$

2. Spiegele die Punkte $A(3|5|7)$ und $B(-3|3|-5)$ (Bilder 1.23 und 1.24 von Seite 15) an den drei Koordinatenebenen und ermittle jeweils die Koordinaten der Bildpunkte!

3. Ermittle die Koordinatendarstellung des Vektors $\vec{a}$ zum Pfeil $\overrightarrow{PP'}$!

a) $P(-1|3)$; $P'(4|0)$ **b)** $P(1|6)$; $P'(-4|3)$ **c)** $P(-3|6)$; $P'(2|3)$
d) $P(1|-2|2)$; $P'(4|1|-1)$ **e)** $P(2|0|-5)$; $P'(0|-1|2)$ **f)** $P(-2|3|1)$; $P'(-3|1|4)$

4. Von einem Parallelogramm sind gegeben ein Eckpunkt A und die beiden Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Bild 1.30). Ermittle die Koordinaten der drei anderen Eckpunkte!

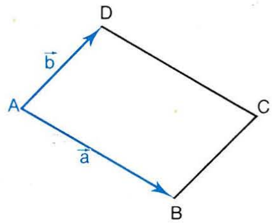


Bild 1.30

a) $A(-3|-2)$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

b) $A(5|3)$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}-7\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$

c) $A(4|-5|-2)$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $A(-3|4|1)$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

5. Vervollständige die Punkte P, Q und R auf mehrere Weisen zu einem Parallelogramm und ermittle jeweils die Koordinaten des vierten Eckpunktes! Wie viele Fälle gibt es? Bestimme jeweils zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die das betreffende Parallelogramm aufspannen!
a) $P(-1|-2)$; $Q(3|-4)$; $R(1|3)$ **b)** $P(1|-2|2)$; $Q(-2|1|3)$; $R(5|-4|-1)$

6. Prüfe, ob die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind! Ermittle gegebenenfalls zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die das Parallelogramm aufspannen!
a) $A(-1|-2)$; $B(3|-4)$; $C(5|2)$; $D(1|4)$
b) $A(2|-4|1)$; $B(4|2|3)$; $C(3|8|2)$; $D(1|2|0)$
c) $A(1|-5)$; $B(3|1)$; $C(2|6)$; $D(0|1)$
d) $A(-1|3|-4)$; $B(5|-1|3)$; $C(-2|3|-1)$; $D(4|-1|6)$

7. Eine Verschiebung V wird festgelegt durch einen Pfeil $\overrightarrow{PP'}$ oder durch einen Verschiebungsvektor $\vec{v}$.
a) Berechne $\vec{v}$ zu **1)** $P(-4|5|3)$; $P'(2|-4|1)$; **2)** $P(6|-3|4)$; $P'(-1|4|5)$!
b) Berechne P' zu **1)** $P(-2|6|3)$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$; **2)** $P(6|1|4)$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\-6\\7\end{pmatrix}$!
c) Berechne P zu **1)** $P'(-3|-4|5)$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\5\end{pmatrix}$ **2)** $P'(-4|2|-1)$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$!

8. Begründe, daß die Formeln $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ bzw. $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ auch gelten, wenn einzelne Koordinaten negativ sind oder den Wert 0 haben!

9. Berechne die Beträge der folgenden Vektoren!
a) $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}\sqrt{11}\\\sqrt{11}\end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix}-2\\9\\6\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-3\\12\\-4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\-24\\7\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}10\\0\\-24\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

§ 2 Die Addition und die Subtraktion von Vektoren

I. Die Addition von Vektoren

1. Bei den einführenden Überlegungen zum Begriff des Vektors haben wir am Beispiel einer Fähre erörtert, wie zwei Geschwindigkeiten, die auf das Schiff einwirken, die Eigengeschwindigkeit $\vec{v}_E$ und die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_S$, zur Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}$ zusammenzufassen sind. Ein Pfeil zu $\vec{v}_S$ ist mit seinem Anfangspunkt an die Spitze eines Pfeils zu $\vec{v}_E$ zu legen. Der Resultatpfeil zu $\vec{v}$ reicht dann vom Anfang des ersten bis zur Spitze des zweiten Pfeils (Bild 2.1). Man schreibt: $\vec{v}_E + \vec{v}_S = \vec{v}$.

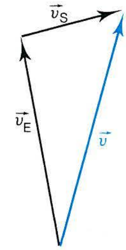


Bild 2.1

Entsprechend kann man auch verfahren, wenn zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ am gleichen Punkt angreifen.

2. In § 1, II haben wir außerdem Verschiebungen als mathematisches Beispiel für die Verwendung von Vektoren betrachtet. In Bild 2.2 ist die Hintereinanderschaltung zweier Verschiebungen V_1 und V_2 dargestellt. Ein Punkt P wird durch die Verschiebung V_1 auf den Punkt P′, P′ durch die Verschiebung V_2 auf den Punkt P″ abgebildet. Insgesamt wird also der Punkt P auf den Punkt P″ abgebildet; der Pfeil $\overrightarrow{PP''}$ kennzeichnet die resultierende Verschiebung $V = V_1 \circ V_2$ (gelesen „V_1 verkettet mit V_2“).

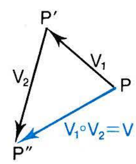


Bild 2.2

Auch hier werden zwei Pfeile in der gleichen Weise zu einem Resultatpfeil verknüpft, wie in Bild 2.1. Es liegt daher nahe, die Pfeile $\overrightarrow{PP'}$, $\overrightarrow{P'P''}$ und $\overrightarrow{PP''}$ als Repräsentanten dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufzufassen und $\vec{c}$ als die Summe der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu erklären.

Wir definieren:

D 2.1 **Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man je einen Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so aneinanderlegt, daß der Anfang des zweiten Pfeils mit der Spitze des ersten Pfeils übereinstimmt. Ein Repräsentant des Summenvektors**

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

reicht dann vom Anfang des ersten bis zur Spitze des zweiten Pfeils (Bild 2.3).

Bemerkungen:

1) Für die Vektoraddition müßte man eigentlich ein anderes Zeichen wählen als für die Zahlenaddition, z.B. „⊕". Da Mißverständnisse aber nicht zu befürchten sind, verwenden wir auch für die Vektoraddition das normale Pluszeichen.

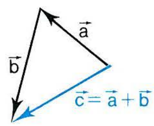


Bild 2.3

2) Da wir die Vektoraddition mit Hilfe von Repräsentanten der betreffenden Vektoren erklärt haben, könnte es sein, daß man bei Verwendung anderer Repräsentanten zu einem anderen Ergebnis käme. Daß dies nicht der Fall ist, daß das Ergebnis einer Vektoraddition also unabhängig davon ist, welche Pfeile bei der Konstruktion verwendet werden, müßten wir strenggenommen geometrisch beweisen. Wir begnügen uns hier mit einem Hinweis auf Bild 2.4. Man erkennt unmittelbar, daß die beiden Dreiecke ABC und A'B'C' durch eine Verschiebung V aufeinander abgebildet werden können; daher sind die Pfeile $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{B'A'}$ gleichlang, parallel und gleich orientiert und gehören daher zum gleichen Vektor $\vec{c}$.

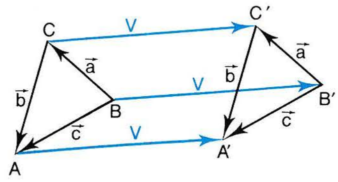


Bild 2.4

3. Wir zeigen zunächst an einem **Beispiel** zweier ebener Vektoren, wie die Vektoraddition mit der Koordinaten der Vektoren durchzuführen ist. Für die Vektoren von Bild 2.5 gilt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und für den Summenvektor

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

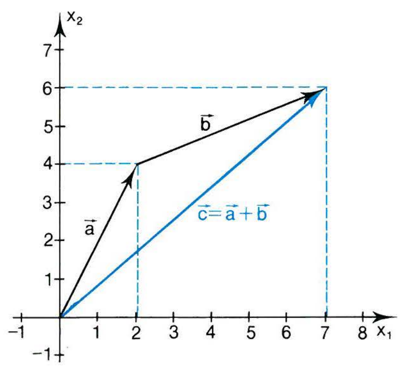


Bild 2.5

Offensichtlich ergeben sich die Koordinaten des Summenvektors durch Addition der entsprechenden Koordinaten der beiden Summanden; denn es gilt:

$$2 + 5 = 7 \quad \text{und} \quad 4 + 2 = 6.$$

Allgemein können wir für ebene bzw. für räumliche Vektoren schreiben:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Wir können die Allgemeingültigkeit dieser Gleichung aus der Pfeildarstellung der Vektoraddition herleiten, wenn wir die drei Vektoren durch die Koordinatendifferenzen der drei Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$; $Q(q_1|q_2|q_3)$ und $R(r_1|r_2|r_3)$ darstellen (Bild 2.6):

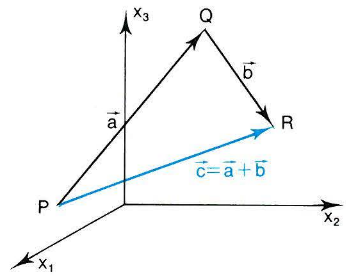


Bild 2.6

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\\q_3-p_3\end{pmatrix};$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1-q_1\\r_2-q_2\\r_3-q_3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1-p_1\\r_2-p_2\\r_3-p_3\end{pmatrix}.$$

Wenn man die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert, erhält man in der Tat die Koordinaten von $\vec{c}$; denn es gilt:

$$a_1+b_1=(q_1-p_1)+(r_1-q_1)=r_1-p_1=c_1,$$
$$a_2+b_2=(q_2-p_2)+(r_2-q_2)=r_2-p_2=c_2 \quad \text{und}$$
$$a_3+b_3=(q_3-p_3)+(r_3-q_3)=r_3-p_3=c_3.$$

Damit haben wir gezeigt:

S 2.1 **Zwei in Koordinatendarstellung gegebene räumliche Vektoren werden addiert, indem man ihre entsprechenden Koordinaten addiert:**

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir haben den Sachverhalt hier nur für **räumliche** Vektoren festgehalten. Wir werden auch im folgenden Definitionen und Sätze in der Regel nur für räumliche Vektoren formulieren. Der entsprechende Sachverhalt für **ebene** Vektoren ergibt sich daraus jeweils durch Weglassen der dritten Koordinate.

<u>**Beispiel**</u> zu Satz S 2.1: $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\7\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+(-5)\\(-2)+7\\(-1)+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$

4. Entsprechend definiert man für Vektoren mit n Koordinaten:

D 2.2 $$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}.$$

Übungen und Aufgaben

1. Durch eine Verschiebung V_1 mit dem Vektor $\vec{v}_1$ wird ein Dreieck ABC auf ein Dreieck A'B'C', durch eine Verschiebung V_2 mit $\vec{v}_2$ das Dreieck A'B'C' auf das Dreieck A''B''C'' abgebildet. Führe die Verschiebungen zeichnerisch durch und ermittle den Vektor $\vec{v}$ zur Verschiebung V, durch die ABC unmittelbar auf A''B''C'' abgebildet wird!

$A(0|1)$; $B(4|-1)$; $C(2|3)$; $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$

2. Zeichne zu den in Bild 2.7 gegebenen Vektoren Repräsentanten der folgenden Summenvektoren!

a) $\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}+\vec{c}$; $\vec{a}+\vec{d}$; $\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{c}+\vec{d}$

b) $(\vec{c}+\vec{a})+\vec{d}$; $(\vec{d}+\vec{a})+\vec{b}$; $\vec{b}+(\vec{a}+\vec{c})$

c) $(\vec{d}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{a})$; $(\vec{b}+\vec{c})+(\vec{d}+\vec{a})$

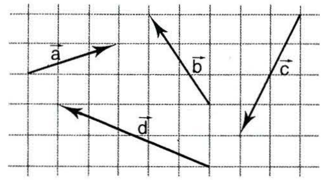


Bild 2.7

3. Ermittle die folgenden Summen rechnerisch!

a) $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ **c)** $\left[\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right]$

4. Berechne die folgenden Summen!

a) $\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-5\\6\end{pmatrix}\right]$ **b)** $\left[\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-3\\-4\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}\right]$

5. Drücke in Bild 2.8 die Vektoren zu den farbig gezeichneten Pfeilen durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

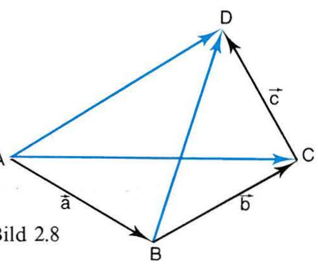


Bild 2.8

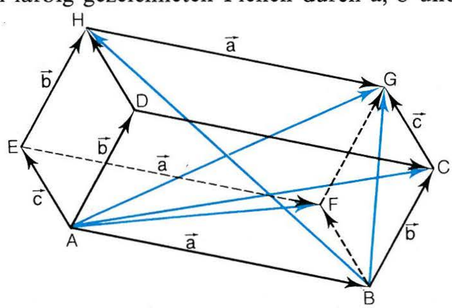


Bild 2.9

6. Ein Parallelflach wird von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt (Bild 2.9). Drücke die Flächen- und die Raumdiagonalen durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

II. Die Gesetze der Vektoraddition

1. Bei der Untersuchung der Frage, welchen grundlegenden Gesetzen die Vektoraddition unterliegt, können wir uns orientieren an den Gesetzen, die uns für die Addition und für die Multiplikation von (rationalen oder reellen) Zahlen bekannt sind.
Wir prüfen also, ob auch für die Vektoraddition gelten: das Kommutativgesetz K, das Assoziativgesetz A, das Neutralitätsgesetz N und das Inversitätsgesetz I.

Wir werden die Gültigkeit dieser Gesetze jeweils einerseits geometrisch an Hand von Pfeilzeichnungen bestätigen, sie andererseits aber auch aus der Koordinatendarstellung arithmetrisch beweisen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns bei Pfeilzeichnungen auf ebene Vektoren; die arithmetischen Beweise führen wir hier dagegen jeweils mit räumlichen Vektoren. Sie können stets ohne Schwierigkeiten auf Vektoren mit beliebig vielen Koordinaten übertragen werden.

2. Wir beginnen mit dem **Kommutativgesetz K:**

S 2.2 Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

In Bild 2.10 ist die Gültigkeit des Gesetzes für ebene Vektoren zeichnerisch bestätigt. Der arithmetische **Beweis** ist sehr einfach zu führen:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\\b_3+a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{b}+\vec{a}, \quad \text{q.e.d.}$$

Der entscheidende Beweisschritt besteht in der Anwendung des Kommutativgesetzes für die Addition reeller Zahlen in den einzelnen Koordinaten des Summenvektors.

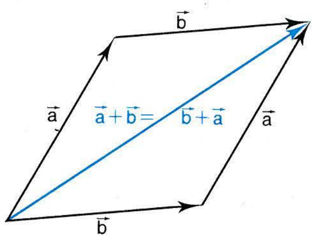


Bild 2.10

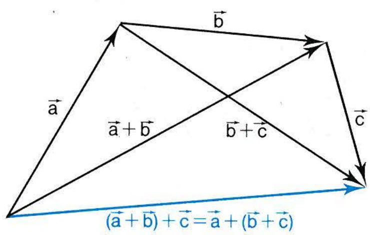


Bild 2.11

3. Das **Assoziativgesetz A** lautet:

S 2.3 Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

In Bild 2.11 ist die Gültigkeit des Gesetzes durch eine Pfeilzeichnung bestätigt. Der rechnerische Beweis soll in Aufgabe 1 geführt werden.

4. Das **neutrale Element** für die Addition von Zahlen ist die Zahl 0; denn für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a+0=0+a=a.$$

Aus der arithmetischen Definition der Vektoraddition (D 2.2) ergibt sich unmittelbar, daß ein **neutrales Element** für die Vektoraddition an allen Stellen die Koordinate 0 haben muß. Es gilt nämlich:

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\\a_3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}.$$ Den Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nennt man den **„Nullvektor"**

(in der Menge V_3); wir bezeichnen den Nullvektor mit „$\vec{0}$".

Wir definieren:

D 2.3 Unter dem Nullvektor $\vec{0}$ versteht man den Vektor, dessen sämtliche Koordinaten 0 sind.

In der geometrischen Interpretation ist der Nullvektor als die Menge aller **„Nullpfeile"** aufzufassen; das sind die Pfeile, bei denen Anfangspunkt und Spitze übereinstimmen. Jeder Nullpfeil hat also die Längenmaßzahl 0; daher hat auch der Nullvektor den Betrag 0:

$$|\vec{0}|=0.$$

Außerdem ist es – wie wir später noch sehen werden – zweckmäßig, dem Nullvektor **jede** Richtung und **jede** Orientierung zuzuordnen.
Es gilt also das **Neutralitätsgesetz N:**

S 2.4 Für jeden Vektor $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

4. Wenn wir zu irgendeiner reellen Zahl a ihre Gegenzahl $-a$ addieren, ergibt sich die Zahl 0, also das neutrale Element der Addition:

$$a+(-a)=(-a)+a=0 \quad \text{(für alle } a \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Die Zahl $-a$ ist daher – hinsichtlich der Addition – das **„inverse Element"** zur Zahl a.
Wir wollen untersuchen, ob es auch zu jedem Vektor $\vec{a}$ hinsichtlich der Vektoraddition einen inversen Vektor $\vec{b}$ gibt. Es müßte dann gelten: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, also:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Daraus ergibt sich unmittelbar: } \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}.$$

Es liegt nahe, diesen Vektor mit **„$-\vec{a}$"** zu bezeichnen und ihn den **„Gegenvektor zum Vektor $\vec{a}$"** zu nennen. Wir definieren:

D 2.4 Der Vektor $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ heißt der „Gegenvektor" zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Für die Addition von Vektoren und ihren Gegenvektoren gilt dann in der Tat das **„Inversitätsgesetz"** I:

S 2.5 Für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt: $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

Der – sehr einfache – Beweis soll in Aufgabe 12 geführt werden.

5. Wir haben uns noch zu fragen, wie ein Vektor $\vec{a}$ geometrisch mit seinem Gegenvektor $-\vec{a}$ zusammenhängt. In den Bildern 2.12a und b sind je zwei ebene Vektoren $\vec{a}$ und ihre Gegenvektoren $-\vec{a}$ jeweils durch ihre am Nullpunkt angetragenen Repräsentanten dargestellt.

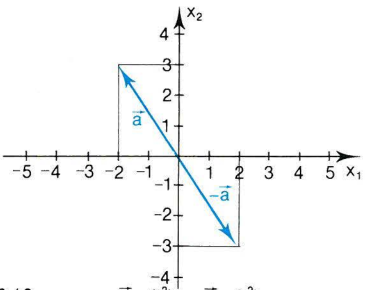
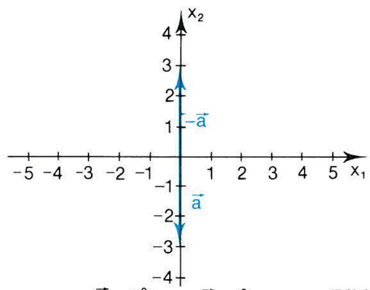


Bild 2.12a $\vec a = \binom{-2}{3}$; $-\vec a = \binom{2}{-3}$



$\vec a = \binom{0}{-3}$ $\vec a = \binom{0}{3}$ Bild 2.12b

Man erkennt, daß die Pfeile zu $\vec a$ und zu $-\vec a$ sich jeweils nur durch ihre **Orientierung** unterscheiden, daß sie aber **gleichlang** und **zueinander parallel** sind.
Man sagt: die Pfeile zu $-\vec a$ sind die **„Gegenpfeile"** der Pfeile zu $\vec a$.
Wir können sogar feststellen: ist ein Pfeil $\overrightarrow{AB}$ ein Vertreter des Vektors $\vec a$, so ist der Pfeil $\overrightarrow{BA}$ ein Vertreter des zugehörigen Gegenvektors $-\vec a$ (Bild 2.13). Gelegentlich schreibt man daher auch:

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$$

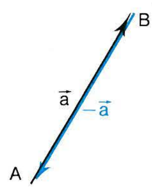


Bild 2.13

6. Die vorstehenden Überlegungen gelten nicht nur für ebene Vektoren, sondern in genau entsprechender Weise auch für räumliche Vektoren. Wir können also feststellen: der Gegenvektor $-\vec a$ zu einem Vektor $\vec a$ besteht jeweils aus der Menge der **„Gegenpfeile"** zu den Pfeilen von $\vec a$, d.h. die Vertreter von $\vec a$ und von $-\vec a$ sind jeweils **gleichlang, zueinander parallel,** aber **entgegengesetzt orientiert.** Mithin gilt der Satz

S 2.6 Für jeden Vektor $\vec a$ und seinen Gegenvektor $-\vec a$ gilt:

1) $|-\vec a| = |\vec a|$; 2) $-\vec a \parallel \vec a$ und 3) $-\vec a \uparrow\downarrow \vec a$.

7. Unmittelbar einsichtig ist ferner, daß der Pfeil $\overrightarrow{AB}$ (Bild 2.13) seinerseits auch Gegenpfeil zum Pfeil $\overrightarrow{BA}$ ist, daß also auch gilt: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
Daher ist nicht nur $-\vec a$ der Gegenvektor zu $\vec a$, sondern auch $\vec a$ der Gegenvektor zu $-\vec a$; die Vektoren $\vec a$ und $-\vec a$ sind also wechselseitig Gegenvektoren zueinander.
Der Gegenvektor zu einem Vektor $-\vec a$ ist mit „$-(-\vec a)$" zu bezeichnen; daher gilt: $-(-\vec a) = \vec a$.

S 2.7 Für alle Vektoren $\vec a \in V$ gilt: $-(-\vec a) = \vec a$.

8. Zusammenfassend können wir feststellen, daß für die Vektoraddition die Gesetze K, A, N und I gelten. Wir haben schon früher eine Reihe von Verknüpfungen kennengelernt, für die diese vier Gesetze gelten:

die Addition von ganzen, von rationalen und von reellen Zahlen;
die Multiplikation von Bruchzahlen, von rationalen und von reellen Zahlen (wobei allerdings die Zahl 0 ausgeschlossen werden muß, weil es zu dieser Zahl bezüglich der Multiplikation kein inverses Element gibt).

Man spricht in jedem dieser Fälle von einer **„kommutativen Gruppe“.** Wir können also feststellen:

S 2.8 **Die Menge der Vektoren V (V_2, V_3 bzw. V_n) bildet bezüglich der Vektoraddition eine kommutative Gruppe.**

Bemerkung: Von einer „Gruppe“ spricht man, wenn die Gesetze A, N und I gelten. Die Gültigkeit des Gesetzes K wird dabei nicht vorausgesetzt; das Gesetz K kann zwar in einer Gruppe gelten, muß es aber nicht.

9. Auf Seite 18 haben wir gesehen, wie man den Betrag eines durch seine Koordinaten gegebenen Vektors $\vec{a}$ erfassen kann:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Bisher kennen wir aber noch keine Bedingung, mit der man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die durch ihre Koordinaten gegeben sind, überprüfen kann, ob sie die gleiche Richtung und gleiche Orientierung haben oder nicht. Eine solche Bedingung erhält man, wenn man $|\vec{a}+\vec{b}|$ mit $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}|$ vergleicht.
Haben zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **verschiedene** Richtungen, so bilden Vertreter von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ ein echtes Dreieck (Bild 2.14). Da in jedem Dreieck die Summe zweier Seitenlängen größer ist als die Länge der dritten Seite, gilt:

$$|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Man spricht bei dieser Beziehung von der **„Dreiecksungleichung“.**

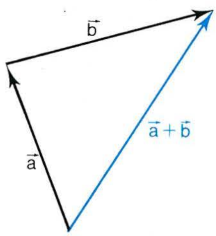


Bild 2.14

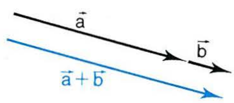


Bild 2.15

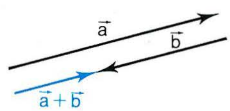


Bild 2.16a

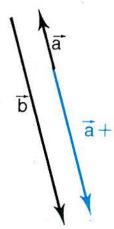


Bild 2.16b

Dagegen gilt für **parallele** und **gleichorientierte** Vektoren:

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{(Bild 2.15).}$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **entgegengesetzt orientiert,** so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) ist $|\vec{a}| \geq |\vec{b}|$, so gilt $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}|$ (Bild 2.16a), also erst recht $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

b) ist $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, so gilt $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{b}|$ (Bild 2.16b), also ebenfalls $|\vec{a}+\vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Nur, wenn $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ist, gilt also $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$. Somit haben wir insgesamt gezeigt:

S 2.9 **Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind parallel und gleichorientiert genau dann, wenn gilt $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$:**

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad |\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Beachte, daß der Satz auch gilt, wenn $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$ ist, weil wir dem Nullvektor jede Richtung und jede Orientierung zugesprochen haben!
Eine entsprechende Bedingung für $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ soll in Aufgabe 10 herausgearbeitet werden.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$; es gilt: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\-5\\10\end{pmatrix}$, also $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{225}=15$ und $|\vec{a}|=\sqrt{81}=9$; $|\vec{b}|=\sqrt{36}=6$, also $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; demnach gilt: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

Übungen und Aufgaben

1. Beweise arithmetisch das Assoziativgesetz der Vektoraddition (Satz S 2.2)!

2. Worin ist es begründet, daß die Vektoraddition zeichnerisch auch durch eine Parallelogrammkonstruktion durchgeführt werden kann?

3. Ein Parallelflach (Spat) wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt (Bild 2.17). Begründe an Hand dieser Figur die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die nicht in einer Ebene liegen!

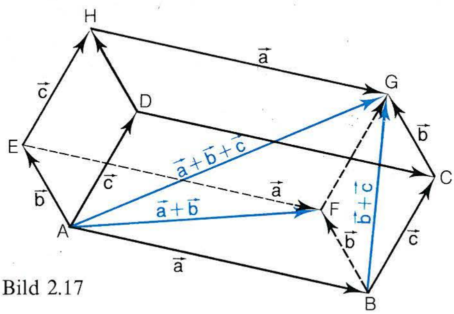


Bild 2.17

4. Beweise mit Hilfe der Gesetze K und A die Allgemeingültigkeit folgender Gleichungen!
a) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\vec{c}+\vec{b})+\vec{a}$ **b)** $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{c}+\vec{d})=\vec{d}+[(\vec{c}+\vec{b})+\vec{a}]$

5. Beweise die Rechtsstreichungsregel: $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$ (für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in V$).

6. Beweise mit Hilfe der Gesetze K, A, N und I und mit Hilfe der Rechtsstreichungsregel (Aufgabe 5) die Allgemeingültigkeit der folgenden Gleichungen!
a) $-\vec{0}=\vec{0}$ **b)** $-(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{a})+(-\vec{b})$ **c)** $\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{a}$

7. a) Warum bildet die Menge aller zueinander parallelen und gleichorientierten Vektoren bezüglich der Addition keine Gruppe?
b) Warum bildet die Menge aller ebenen Vektoren gleichen Betrags keine Gruppe?

8. Löse die folgenden Gleichungen nach $\vec{x}$ auf!
a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ **b)** $\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{x}+\vec{b}+(-\vec{a})$
c) $\vec{b}+(-\vec{x})+\vec{a}=\vec{b}-(-\vec{a})$ **d)** $(-\vec{c})+\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})$

9. Beweise arithmetisch, daß für alle $\vec{a}\in V$ gilt: $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

10. **a)** Formuliere und beweise einen dem Satz S 2.9 entsprechenden Satz für entgegengesetzt orientierte Vektoren!
b) Untersuche mit Hilfe von Satz S 2.9 und des Satzes von a), ob die gegebenen Vektoren parallel sind und welche Orientierung sie gegebenenfalls haben! Bestätige das Ergebnis für die Beispiele 1), 2) und 3) durch eine Zeichnung!

1) $\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. Suche Beispiele für Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{b}$ und $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$, für die folgende Bedingung gilt!
a) $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|$ **b)** $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{b}+\vec{b}|$ **c)** $|\vec{a}+(-\vec{b})| = |\vec{b}|$

12. Beweise das Inversitätsgesetz (Satz S 2.4) arithmetisch!

13. Fällt beim Aneinanderlegen von Pfeilen die Spitze des letzten Summanden mit dem Anfang des ersten zusammen, so spricht man von einer **„geschlossenen Vektorkette“** (Bild 2.18).
a) Wie lautet der Summenvektor einer geschlossenen Vektorkette?
b) Orientiere die Seitenvektoren eines Dreiecks (Vierecks) so, daß eine geschlossene Vektorkette entsteht!
c) Durch welchen Vektor kann man eine offene Vektorkette zu $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ schließen?

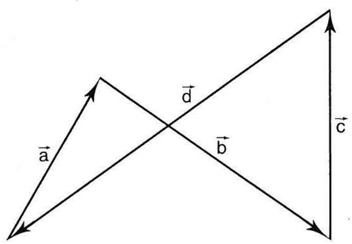


Bild 2.18

14. Müssen Vektoren des V_3, für die **a)** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, **b)** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ gilt, parallel zu einer Ebene liegen?

III. Die Subtraktion von Vektoren

1. Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß für die Addition von Vektoren dieselben Gesetze gelten wie für die Addition von reellen Zahlen. Daher liegt es auf der Hand, daß auch die Umkehrung der Addition, die Subtraktion, für Vektoren genauso festgelegt werden kann wie für Zahlen, nämlich analog zu der Beziehung: $a-b=a+(-b)$. Wir definieren:

D 2.5 Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Bemerkung: Strenggenommen müßten wir für die Vektorsubtraktion ein anderes Zeichen wählen wie für die Subtraktion von Zahlen. Weil auch hier Verwechslungen kaum zu befürchten sind, verzichten wir auf eine solche Unterscheidung.

2. Nach Definition D 2.5 läßt sich ein Vertreter des Differenzvektors $\vec{a}-\vec{b}$ zweier Vektoren in einfacher Weise auch zeichnerisch bestimmen. In Bild 2.19 sind Vertreter zweier Vektoren $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ additiv aneinandergelegt. Zusätzlich ist ein Vertreter des Vektors $\vec{b}$ eingezeichnet. Man erkennt, daß die Pfeile zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ mit ihren **Spitzen** aneinanderstoßen; der Vertreter des Vektors $\vec{a}-\vec{b}$ reicht vom Anfang des ersten Pfeils (zu $\vec{a}$) bis zum Anfang des zweiten Pfeils (zu $\vec{b}$).

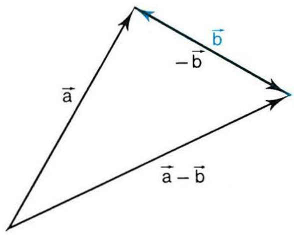


Bild 2.19

Bemerkungen:

1) Auf diese Weise haben wir schon in der 5. Klasse die Subtraktion von natürlichen Zahlen, später die Subtraktion von Bruchzahlen und von rationalen Zahlen dargestellt. Wir haben dabei von der Regel **„Spitze an Spitze"** gesprochen.

2) Man kann einen Vertreter des Differenzvektors $\vec{a}-\vec{b}$ zeichnerisch auch dadurch bestimmen, daß man zwei Vertreter der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit ihren **Anfangspunkten** aneinanderlegt; dann reicht ein Vertreter des Vektors $\vec{a}-\vec{b}$ von der Spitze des **zweiten** Pfeils (zu $\vec{b}$) bis zur Spitze des **ersten** Pfeils (zu $\vec{a}$) (Bild 2.20). Begründe die Richtigkeit dieser Konstruktion (Aufgabe 6)!

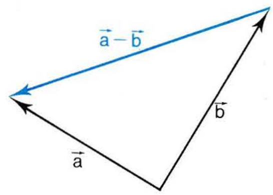


Bild 2.20

3. Wir können nun leicht zeigen, daß Vektoraddition und Vektorsubtraktion wechselseitig Umkehrungen voneinander sind.
Nach Definition D 2.5 gilt nämlich für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$:

1)
$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b} &= [\vec{a}+(-\vec{b})]+\vec{b}\\ &= \vec{a}+[(-\vec{b})+\vec{b}]\\ &= \vec{a}+\vec{0}\\ &= \vec{a}\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b} &= (\vec{a}+\vec{b})+(-\vec{b}) && \text{(D 2.5)}\\ &= \vec{a}+[\vec{b}+(-\vec{b})] && \text{(A)}\\ &= \vec{a}+\vec{0} && \text{(I)}\\ &= \vec{a} && \text{(N)}\end{aligned}$$

4. Es stellt sich nun noch die Frage, wie die Vektorsubtraktion mit Hilfe der Koordinaten der betreffenden Vektoren durchzuführen ist. Diese Frage ist leicht zu beantworten; für Vektoren mit drei Koordinaten erhält man nämlich:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\\-b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+(-b_1)\\a_2+(-b_2)\\a_3+(-b_3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}.$$

Es gilt also der Satz:

S2.10 Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$.

In Worten: Vektoren werden subtrahiert, indem man ihre entsprechenden Koordinaten subtrahiert. Der Sachverhalt gilt entsprechend für Vektoren mit beliebig vielen Koordinaten.

Bemerkung: Die so definierte Vektorsubtraktion hat auch für Vektoren mit mehr als drei Koordinaten und in Anwendungssituationen einen guten Sinn.

Beispiel:

Eine Firma erfaßt den Lagerbestand von 6 Geräten und die Tagesauslieferung dieser Geräte jeweils durch Vektoren mit 6 Koordinaten. Der Lagerbestand am folgenden Tag ergibt sich dann – wenn keine Auffüllung aus der Produktion vorgenommen worden ist – durch die Berechnung des Differenzvektors.

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle die folgenden Differenzen zeichnerisch!

a) $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\left[\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right]-\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$

2. Berechne $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$ und $\vec{b}-(\vec{c}-\vec{a})$ für folgende Vektoren!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\5\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}11\\-6\\-4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\6\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-6\end{pmatrix}$

3. Zeige geometrisch mit Hilfe von Definition D2.5, daß $\vec{a}-\vec{b}$ inverses Element zu $\vec{b}-\vec{a}$ ist!

4. Gilt das Assoziativgesetz für die Vektorsubtraktion? Begründe deine Antwort!

5. Beweise die Allgemeingültigkeit der folgenden Gleichungen aus Definition D2.5 mit Hilfe der Gruppengesetze!

a) $\vec{a}-(-\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}$ **b)** $(-\vec{a})-\vec{b}=-(\vec{a}+\vec{b})$ **c)** $(-\vec{a})+\vec{b}=-(\vec{a}-\vec{b})$

d) $\vec{a}+(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})-\vec{c}=(\vec{a}-\vec{c})+\vec{b}$ **e)** $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}=\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}-\vec{c})-\vec{b}$

f) $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})=(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}$ **g)** $-(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=(-\vec{a})+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$

6. Zeige, daß die beiden Konstruktionsverfahren gleichwertig sind, die in den Bildern 2.19 und 2.20 (Seite 31) dargestellt sind!

7. Ein Parallelogramm werde durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Drücke die Diagonalenvektoren durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus!

8. Ein Tetraeder werde durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt (Bild 2.21). Drücke die Seiten der Grundfläche durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

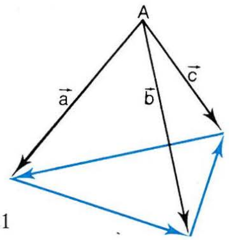


Bild 2.21

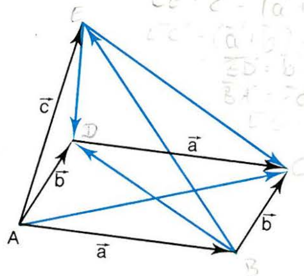


Bild 2.22

9. Die Pyramide in Bild 2.22 wird durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Drücke die zu den farbig eingezeichneten Pfeilen gehörenden Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

10. Ein Parallelflach werde durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt (Bild 2.17).

a) Drücke alle vier Raumdiagonalen durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

b) Zeige, daß die vier Vektoren bei geeigneter Orientierung eine geschlossene Vektorenkette bilden!

c) Zeige, daß sich auch die zu je vier Flächendiagonalen gehörenden Vektoren so orientieren lassen, daß sie eine geschlossene Vektorkette bilden! (Auf wie viele Arten ist dies möglich?)

11. Berechne die Koordinaten von $\vec{x}$!

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **b)** $-\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \vec{x}$ **c)** $\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

12. Löse die folgenden Gleichungen nach $\vec{x}$ auf!

a) $\vec{a} - (\vec{x} - \vec{b}) = \vec{c} + \vec{b}$ **b)** $(-\vec{b} + \vec{x}) - \vec{a} = (\vec{c} - \vec{b}) - \vec{a}$

c) $\vec{a} + [-\vec{x} - (\vec{b} + \vec{x})] = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{x})$ **d)** $\vec{a} - [\vec{b} - (\vec{c} - \vec{x})] = \vec{0}$

e) $[\vec{x} - (\vec{a} + \vec{x})] - \vec{x} = (-\vec{a})$ **f)** $-(\vec{a} + \vec{x} + \vec{b}) = \vec{c} - [\vec{x} + (\vec{a} - \vec{x})]$

13. Zeige mit Hilfe der Gruppengesetze, daß jede Gleichung der Form $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$ (bzw. $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$) für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ genau eine Lösung hat!

14. Beweise den Satz: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$!
(Vergleiche Satz S 2.9!)

§ 3 Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

I. Die Definition der S-Multiplikation

1. Für natürliche Zahlen ist die Multiplikation definiert als mehrfache Addition gleicher Summanden.

Beispiel: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$

Es liegt nahe, in entsprechender Weise auch bei Vektoren eine Abkürzung für Summen einzuführen, bei denen der gleiche Vektor mehrfach als Summand auftritt.

Beispiel: $3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ (Bild 3.1)

Bemerkung: Wir schreiben $3\vec{a}$ **ohne** Multiplikationspunkt, weil wir den Punkt als Zeichen für ein – später zu definierendes – Produkt von zwei Vektoren reservieren wollen.

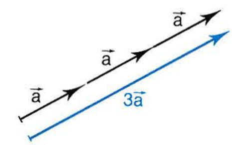


Bild 3.1

Wenn wir diese Schreibweise auf die Koordinatendarstellung übertragen, erhalten wir (für räumliche Vektoren):

$$3\vec{a} = 3\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 + a_1 \\ a_2 + a_2 + a_2 \\ a_3 + a_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ 3a_2 \\ 3a_3 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergibt sich für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$:

$$n\vec{a} = n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na_1 \\ na_2 \\ na_3 \end{pmatrix}.$$

Man spricht gelegentlich vom „n-fachen des Vektors $\vec{a}$“.

2. Die im Vorstehenden beschriebene Erklärung der Vervielfachung eines Vektors $\vec{a}$ mit Hilfe der Vektoraddition ist – genau wie bei Zahlen – in dieser einfachen Weise nur möglich, wenn der Vervielfacher n, der Multiplikator, eine natürliche Zahl ist. Die Übertragung auf beliebige reelle Zahlen als Faktoren läßt sich aber ohne Schwierigkeiten an Hand der zuletzt gewonnenen Gleichung

$$n\vec{a} = n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na_1 \\ na_2 \\ na_3 \end{pmatrix}$$

vornehmen.

Es liegt daher nahe, allgemein (für Vektoren mit drei Koordinaten) zu definieren:

D 3.1 Für beliebige Vektoren $\vec{a} \in V_3$ und für beliebige reelle Zahlen r gilt:

$$r\vec{a} = r\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r a_1 \\ r a_2 \\ r a_3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben es hier mit einer Verknüpfung zu tun, die andersartig ist als die uns bisher bekannten Verknüpfungen. Hier werden nämlich verschiedenartige Objekte miteinander verknüpft, und zwar **Zahlen** mit **Vektoren.** Jedem Paar $(r|\vec{a})$, welches aus einer reellen Zahl r und einem Vektor $\vec{a}$ besteht, wird in eindeutiger Weise ein Vektor zugeordnet:

$$(r|\vec{a}) \mapsto r\vec{a}.$$

Da man Zahlen innerhalb der Vektorrechnung häufig als „Skalare“[1]) bezeichnet, spricht man bei dieser Verknüpfung von der **„S-Multiplikation“.**
(Das Wort „Skalarprodukt“ wird für eine andere Verknüpfung reserviert.)

Bemerkung: Die Festsetzung von D 3.1 ist in verallgemeinerter Form auch für die Beschreibung von Anwendungssituationen sehr geeignet.

Beispiel: Wenn die Tagesproduktion eines Werkes für n Produkte durch einen Vektor $\vec{a}$ mit n Koordinaten erfaßt wird, dann wird – bei gleichbleibender Tagesproduktion – die Produktion für eine 5-Tage-Woche erfaßt durch den Vektor $5\vec{a}$.

3. Aus der Definition D 3.1 ergibt sich unmittelbar die Allgemeingültigkeit der Gleichungen:

1) $1\vec{a} = \vec{a}$; **2)** $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; **3)** $0\vec{a} = \vec{0}$; **4)** $r\vec{0} = \vec{0}$ (Aufgabe 1).

Ersetzen wir in Definition D 3.1 den Vektor $\vec{a}$ durch seinen Gegenvektor $-\vec{a}$, so erhalten wir:

$$r(-\vec{a}) = \begin{pmatrix} r\cdot(-a_1) \\ r\cdot(-a_2) \\ r\cdot(-a_3) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -(r a_1) \\ -(r a_2) \\ -(r a_3) \end{pmatrix}}_{=\,-(r\vec{a})} = \underbrace{\begin{pmatrix} (-r)\cdot a_1 \\ (-r)\cdot a_2 \\ (-r)\cdot a_3 \end{pmatrix}}_{=\,(-r)\vec{a}.}$$

Wir halten den Sachverhalt fest im Satz:

S 3.1 Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt: $r(-\vec{a}) = -(r\vec{a}) = (-r)\vec{a}$.

4. Unter 1) und 2) hat sich ergeben, daß $r\vec{a} = \vec{0}$ sowohl für $r=0$ wie für $\vec{a} = \vec{0}$ gilt. Es erhebt sich die Frage, ob $r\vec{a}$ auch noch in anderen Fällen gleich dem Nullvektor sein kann. Wir vermuten natürlich, daß dies nicht der Fall ist, daß also der folgende Satz gilt:

S 3.2 $r\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow r = 0 \vee \vec{a} = \vec{0}$ (für $r \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V$).

Der Beweis soll in Aufgabe 2 erbracht werden.

---

[1]) scala (lat.), Treppe, Skala.

Übungen und Aufgaben

1. Beweise mit Hilfe von Definition D 3.1 die Allgemeingültigkeit der folgenden Gleichungen!

a) $1\vec{a}=\vec{a}$ **b)** $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ **c)** $0\vec{a}=\vec{0}$ **d)** $r\vec{0}=\vec{0}$ $(r\in\mathbb{R})$

2. Beweise den Satz S 3.2!

3. Ermittle zeichnerisch und rechnerisch zu den Vektoren

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ die folgenden Vielfachen!

a) $3\vec{a},\ 2\vec{b},\ (-4)\vec{c}$ **b)** $(-4)\vec{a},\ \frac{3}{2}(-\vec{b}),\ -\frac{5}{2}(-\vec{c})$

4. Bestimme den Vektor $\vec{a}$ so, daß für den angegebenen Vektor $\vec{b}$ gilt **1)** $\vec{b}=3\vec{a}$ und **2)** $\vec{b}=-2\vec{a}$!

a) $\begin{pmatrix}12\\-24\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-18\\12\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-48\\12\\-36\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}\sqrt{72}\\-12\\\sqrt{108}\end{pmatrix}$

5. Prüfe, ob bei den folgenden Vektoren der eine ein Vielfaches des anderen ist und ermittle gegebenenfalls den Faktor r!

a) $\begin{pmatrix}16\\-12\\-8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-12\\9\\6\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}6\\-15\\-9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\25\\-15\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\0\\-9\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-4\\-13\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16\\56\\-32\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sqrt{8}\\\sqrt{6}\\-\sqrt{18}\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}-\sqrt{75}\\\sqrt{6}\\\sqrt{48}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$

6. Berechne für die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ die folgenden Vektoren!

a) $5\vec{a}+3\vec{b}$ **b)** $-3\vec{a}+4\vec{c}$ **c)** $-\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$ **d)** $-4\vec{a}-(2\vec{b}-5\vec{c})$

7. Berechne mit den Vektoren von Aufgabe 6 einen Vektor $\vec{d}$ so, daß er mit den folgenden Vektorsummen eine geschlossene Vektorkette bildet!

a) $2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$ **b)** $\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$ **c)** $4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$ **d)** $4\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

II. Die Gesetze der S-Multiplikation

1. Wir haben oben schon erörtert, daß wir es bei der S-Multiplikation mit einer Verknüpfung zu tun haben, die sich von den uns bisher bekannten Verknüpfungen dadurch unterscheidet, daß nicht gleichartige Größen miteinander verknüpft werden, sondern verschiedenartige, nämlich Zahlen und Vektoren.

Wir können daher von vorneherein nicht erwarten, daß für die S-Multiplikation die gleichen Gesetze gelten wie für die Zahlenverknüpfungen (Addition und Multiplikation). Dennoch können wir uns von den seit langem bekannten Gesetzen leiten lassen, um die für die S-Multiplikation grundlegenden Gesetze zu finden.

2. Eine zur Gleichung des Kommutativgesetzes analoge Gleichung für die S-Multiplikation müßte lauten:

$$r\vec{a} = \vec{a}r.$$

Der Term „$\vec{a}r$" ist aber nicht definiert. Daher gibt es **kein** Kommutativgesetz für die S-Multiplikation.

3. Wir fragen uns nun, ob es für die S-Multiplikation ein dem **Assoziativgesetz** analoges Gesetz gibt. Ein Ausdruck der Form „$r\vec{a}$" stellt einen Vektor dar. Wir können diesen Vektor also nur mit einer weiteren Zahl s verknüpfen; wir erhalten: $s(r\vec{a})$. Wir können dann fragen, ob wir – in Analogie zum Assoziativgesetz – statt dessen auch $(s \cdot r)\vec{a}$ schreiben dürfen, ob die Gleichung

$$s(r\vec{a}) = (s \cdot r)\vec{a}$$

also für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt. Hierbei ist zu beachten, daß $s \cdot r$ ein **Zahlen**produkt darstellt, während in $s(r\vec{a})$ zweimal die S-Multiplikation angewendet wird. Bild 3.2 veranschaulicht ein einfaches **Beispiel**, nämlich

$$2(3\vec{a}) = (2 \cdot 3)\vec{a} = 6\vec{a}.$$

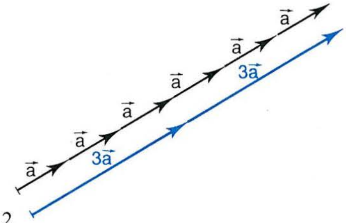


Bild 3.2

In der Tat gilt das **„Assoziativgesetz der S-Multiplikation"**:

S 3.3 Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt: $r(s\vec{a}) = (r \cdot s)\vec{a}$.

Der Beweis soll in Aufgabe 1a) geführt werden.

4. Wir wollen nun prüfen, ob für die S-Multiplikation und die Vektoraddition ein **Distributivgesetz** gilt. Im Distributivgesetz für Zahlen

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

wird ein Zusammenhang zwischen den beiden Rechenarten der Addition und der Multiplikation ausgedrückt. Die Multiplikation ist in unserem Fall die S-Multiplikation. Für die Addition gibt es zwei Möglichkeiten: die **Zahlenaddition** und die **Vektoraddition.** Die erste Möglichkeit führt für zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{a}$ auf die Gleichung

$$(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}.$$

Hierbei ist aber zu beachten, daß das Pluszeichen links die Zahlenaddition, rechts dagegen die Vektoraddition bezeichnet.

Die zweite Möglichkeit führt für eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf die Gleichung

$$r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}.$$

Hierbei tritt auf beiden Seiten die Vektoraddition auf. Wir wollen die beiden Möglichkeiten im folgenden untersuchen.

5. Bild 3.3 veranschaulicht die Gültigkeit der Gleichung

$$3\vec{a}+2\vec{a}=(3+2)\vec{a}=5\vec{a}.$$

Durch Verallgemeinerung erhalten wir das **„1. Distributivgesetz für die S-Multiplikation“:**

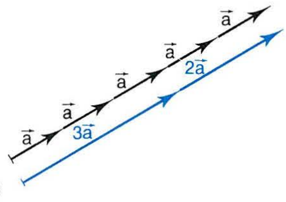


Bild 3.3

S 3.4 Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a} \in V$ gilt: $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$.

Der Beweis soll in Aufgabe 1 b) geführt werden.

6. Die zweite Möglichkeit eines Distributivgesetzes ist in Bild 3.4 am <u>**Beispiel**</u>

$$3(\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b}$$

veranschaulicht. Man erkennt, daß es sich um die Strahlensatzfigur handelt.
Durch Verallgemeinerung erhalten wir das **„2. Distributivgesetz für die S-Multiplikation“:**

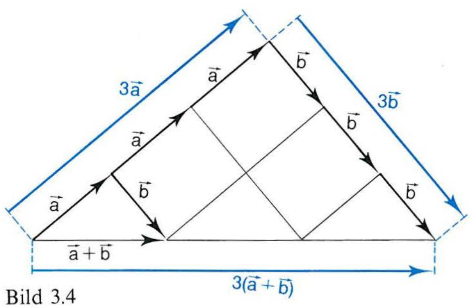


Bild 3.4

S 3.5 Für alle $r \in \mathbb{R}$ und für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $r(\vec{a}+\vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$.

Der Beweis soll in Aufgabe 1 c) geführt werden.

7. Wir haben uns schließlich noch zu überlegen, wie sich die Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl r geometrisch auswirkt, welcher Zusammenhang also hinsichtlich Betrag, Richtung und Orientierung zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $r\vec{a}$ besteht. Um zu einer Vorstellung über diesen Zusammenhang zu kommen, kann man sich an dem in Bild 3.1 (Seite 34) dargestellten Sonderfall $3\vec{a}$ orientieren. Man kann vermuten, daß für den **Betrag** von $r\vec{a}$ gilt:

$$|r\vec{a}| = |r|\,|\vec{a}|;$$

daß ferner $r\vec{a}$ stets **parallel** zu $\vec{a}$ ist und daß $r\vec{a}$ und $\vec{a}$ für $r>0$ **gleich orientiert,** für $r<0$ dagegen **entgegengesetzt orientiert** sind. Wir halten dies fest im Satz

S 3.6 Für jede Zahl $r \in \mathbb{R}$ und jeden Vektor $\vec{a} \in V$ gilt:

1) $|r\vec{a}| = |r|\,|\vec{a}|$; **3) a) $r\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, wenn $r \geq 0$;**

2) $r\vec{a} \parallel \vec{a}$; **b) $r\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, wenn $r<0$ ist.**

Beweis:

Zu 1): Für alle $r \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a} \in V_3$ gilt:

$$|r\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} r a_1 \\ r a_2 \\ r a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2 a_1^2 + r^2 a_2^2 + r^2 a_3^2} = \sqrt{r^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |r|\,|\vec{a}|.$$

Zu 2) und zu 3): Um den Satz S 2.9 anwenden zu können, betrachten wir $|\vec{a} + r\vec{a}|$.

a) Für jede Zahl r mit $r \geq 0$ und für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{a} + r\vec{a}| &= |(1+r)\vec{a}| && \text{(nach Satz S 3.4)} \\ &= |1+r|\,|\vec{a}| && \text{(nach 1))} \\ &= (1+r)\,|\vec{a}| && \text{(wegen } r \geq 0\text{, also } 1+r>0) \\ &= |\vec{a}| + r\,|\vec{a}| && \text{(nach dem Distributivgesetz)} \\ &= |\vec{a}| + |r|\,|\vec{a}| && \text{(wegen } r \geq 0) \\ &= |\vec{a}| + |r\vec{a}| && \text{(nach 1)).} \end{aligned}$$

Nach Satz S 2.9 bedeutet dies, daß $\vec{a}$ und $r\vec{a}$ parallel und gleichorientiert sind.

b) Für jede Zahl r mit $r<0$ gilt $-r>0$, also

$$(-r)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \quad \text{(nach a)).}$$

Der Gegenvektor zu $(-r)\vec{a}$ ist der Vektor $-(-r)\vec{a} = r\vec{a}$; daher gilt nach Satz S 2.6

$$r\vec{a} \uparrow\downarrow (-r)\vec{a}$$

und somit

$$r\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a} \text{ und selbstverständlich auch } r\vec{a} \parallel \vec{a}.$$

Damit ist Satz S 3.6 vollständig bewiesen.

Übungen und Aufgaben

1. Beweise mit Hilfe der Koordinatendarstellung die folgenden Sätze!
a) S 3.3 **b)** S 3.4 **c)** S 3.5

2. Löse die folgenden Vektorgleichungen nach $\vec{x}$ auf!
a) $3\vec{a} - 2\vec{x} = \vec{b} - (\vec{x} - \vec{a})$
b) $5(\vec{a} + 2\vec{x}) = 3(2\vec{b} + 3\vec{x}) + \vec{a}$
c) $\frac{1}{2}(\vec{a} + 5\vec{x}) = \frac{3}{2}(2\vec{a} - \vec{x}) + 5\vec{b}$
d) $\frac{1}{2}(\vec{a} - 3\vec{x}) + \vec{x} = 3(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{x})$

3. Untersuche, was an den folgenden Beziehungen falsch ist!
a) $3\vec{a} + 2(\vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2} = \vec{c} - \vec{b}$
b) $3(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) - 2\vec{b} + \vec{a}\vec{b} = 7 - 3\vec{a}$
c) $x\vec{a} = \dfrac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\vec{b} - \vec{c}}{\vec{a}}$
d) $x(\vec{a} - \vec{b}) = -x(\vec{a} + \vec{b}) \wedge x \neq 0 \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$

4. Ein Dreieck ist gegeben durch die drei Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ (Bild 3.5). Drücke die folgenden Vektoren durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

a) die Seitenhalbierenden („Schwerelinien") $\vec{s}_a$, $\vec{s}_b$ und $\vec{s}_c$;

b) die Mittellinien $\vec{m}_a$, $\vec{m}_b$ und $\vec{m}_c$!

c) Bilde $\vec{s}_a+\vec{s}_b+\vec{s}_c$ und $\vec{m}_a+\vec{m}_b+\vec{m}_c$ und deute die Ergebnisse!

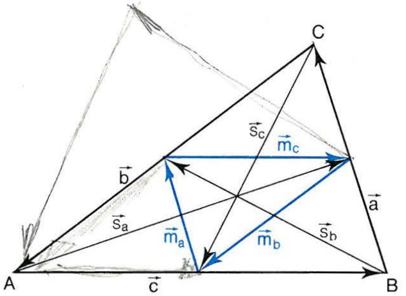


Bild 3.5

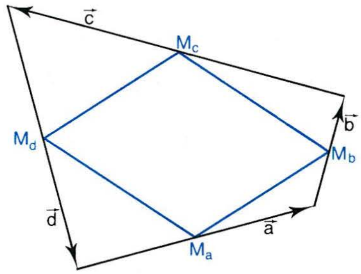


Bild 3.6

5. Gegeben sind die Vektoren

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ **2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix}$

a) Bestimme den Vektor $\vec{d}$ so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ eine geschlossene Vektorkette bilden!

b) Ermittle für das von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ bestimmte Viereck die Vektoren, die zu den Verbindungsstrecken benachbarter Seitenmittelpunkte gehören (Bild 3.6)!

c) Welche Figur bilden die Seitenmitten?

6. Zeige, daß die Seitenmittelpunkte eines beliebigen (ebenen oder nichtebenen) Vierecks stets ein Parallelogramm bilden (Bild 3.6)!

7. Ein Tetraeder sei durch drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bestimmt, deren Vertreter von der Spitze S ausgehen. M_1, M_2 und M_3 seien die in Bild 3.7 eingezeichneten Kantenmitten. S_1 teile SM_1 im Verhältnis 2:1.

a) Drücke die Vektoren zu $\overrightarrow{M_1M_3}$ und $\overrightarrow{M_2S_1}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus!

b) Bei oberflächlicher Betrachtung des Bildes 3.7 könnte man vermuten, daß $\overrightarrow{M_1M_3}$ parallel zu $\vec{a}$ und $\overrightarrow{M_2S_1}$ parallel zu $\vec{b}-\vec{a}$ ist. Begründe, daß beide Vermutungen nicht zutreffen!

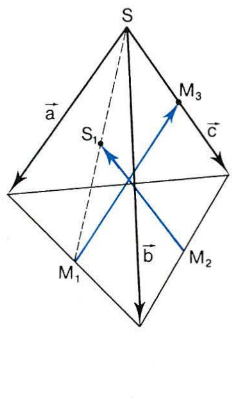


Bild 3.7

§ 4 Der Begriff der linearen Abhängigkeit

I. Linear abhängige und linear unabhängige Vektoren

1. Bild 4.1 zeigt den von Kaiser Friedrich I. gestifteten berühmten Barbarossaleuchter im Oktogon des Aachener Kaiserdoms. Man erkennt, daß zur Halterung des Leuchters in regelmäßigen Abständen acht Streben angebracht sind.

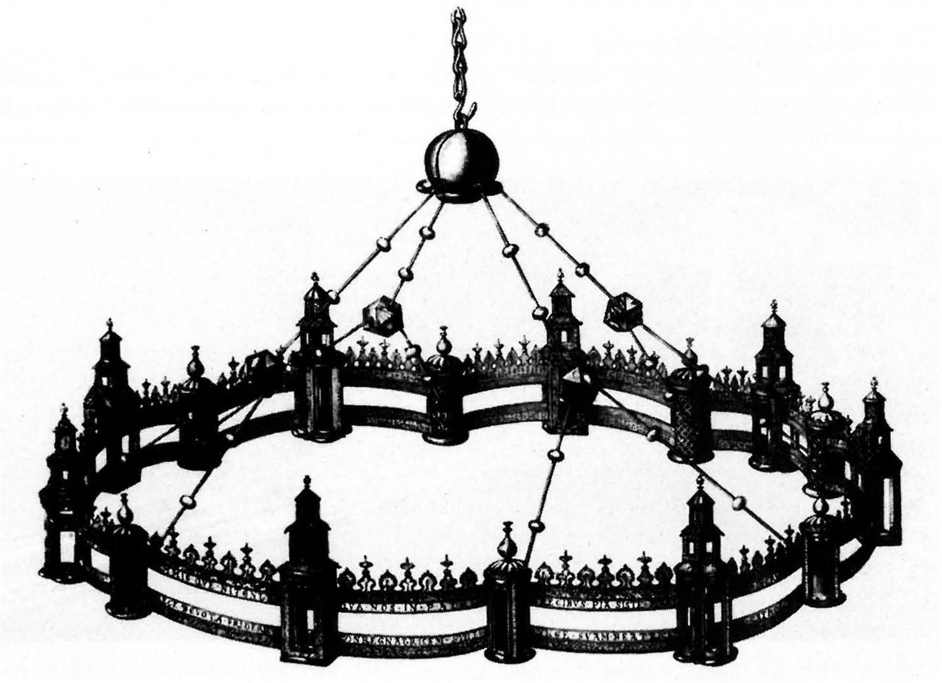


Bild 4.1

Je zwei dieser Streben werden in vier großen Metallkörpern zu einer weiteren Strebe zusammengefaßt. Diese vier Streben enden in einer großen Kugel, die an einer schweren Kette befestigt ist.
Die den Leuchter haltende Kraft wird also zunächst in vier, dann in acht Teilkräfte zerlegt; umgekehrt ausgedrückt: die den Leuchter haltende Kraft, die letztlich vom Gewölbe des Oktogons aufgebracht wird, setzt sich aus Teilkräften verschiedener Richtung zusammen.
Wir können uns die Richtung der unteren Streben durch acht Vektoren

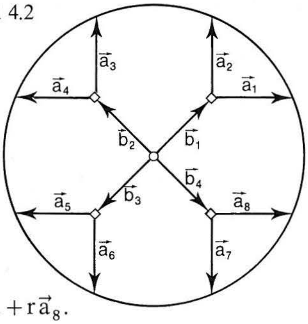
$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_8,$$

die Richtung der oberen Streben durch vier Vektoren

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \text{ und } \vec{b}_4$$

festgelegt denken. Bild 4.2 zeigt eine Skizze des Grundrisses des Leuchters mit den Projektionen der Vektoren $\vec{a}_i$ und $\vec{b}_k$.
Da die Streben symmetrisch angebracht sind, nimmt jede der acht unteren Streben **betragsmäßig** den gleichen Kraftanteil auf; nur die **Richtungen** der Teilkräfte $\vec{K}_i$ sind voneinander verschieden. Für die Teilkraft, die von der i-ten Strebe aufgenommen wird, gilt: $\vec{K}_i = r\vec{a}_i$,

Bild 4.2



für die Gesamtkraft also: $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \ldots + \vec{K}_8 = r\vec{a}_1 + r\vec{a}_2 + \ldots + r\vec{a}_8$.

Entsprechend gilt für die Aufteilung der Gesamtkraft $\vec{K}$ auf die oberen Streben:

$$\vec{K} = s\vec{b}_1 + s\vec{b}_2 + s\vec{b}_3 + s\vec{b}_4.$$

2. Bild 4.3 zeigt die Rheinbrücke zwischen Mannheim und Ludwigshafen. Es handelt sich um eine Hängebrücke.

Bild 4.3

Die Last der Brücke wird von 48 Stahlseilen aufgenommen. Die Richtung der Stahlseile sei festgelegt durch die Vektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_{48}$. Wegen der **asymmetrischen** Anbringung verteilt sich die die Brücke tragende Kraft in diesem Falle **ungleichmäßig** auf die einzelnen Stahlseile. Die einzelnen Streben nehmen einen nach **Betrag** und **Richtung** verschiedenen Kraftanteil $\vec{K}_i = k_i\vec{c}_i$ auf; insgesamt gilt also:

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \ldots + \vec{K}_{48} = k_1\vec{c}_1 + k_2\vec{c}_2 + \ldots + k_{48}\vec{c}_{48}.$$

3. Im folgenden interessiert uns der Zusammenhang, der bei den vorstehenden Beispielen zwischen dem Kraftvektor $\vec{K}$ und den Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_8$ bzw. $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4$ bzw. $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{48}$ besteht. Man drückt diesen Zusammenhang folgendermaßen aus: der Kraftvektor $\vec{K}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_8$ (bzw. aus $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4$ bzw. aus $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_{48}$) **„linear kombiniert"** oder **„linear erzeugt"**; der Kraftvektor $\vec{K}$ ist eine **„Linearkombination"** dieser Vektoren.

Allgemein definiert man:

D 4.1 **Für n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$ und n reelle Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ heißt der Vektor $\vec{b}$ mit $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n$ eine „Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$“.**

Man sagt auch: **der Vektor $\vec{b}$ ist „aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ linear kombiniert“ oder „linear erzeugt“.**

Beachte: Bei dieser Definition wird nichts darüber ausgesagt, wie viele Koordinaten die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ und $\vec{b}$ haben! Es kann sich also um ebene, um räumliche, aber z.B. auch um Vektoren mit 6 Koordinaten handeln.

4. Wir wollen den in Definition D 4.1 festgehaltenen Sachverhalt an einigen Beispielen dadurch verdeutlichen, daß wir für einige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ beliebige Zahlen $r_1, r_2, \dots, r_n$ auswählen, um daraus einen neuen Vektor $\vec{b}$ zu erzeugen. Bei ebenen und bei räumlichen Vektoren können wir den Sachverhalt dann überdies anschaulich deuten.

Beispiele:

1) Wir wählen die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die Faktoren $r_1 = 3$; $r_2 = 2$ und $r_3 = -2$. Wir erhalten:

$$\vec{b} = 3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + (-2)\vec{a}_3 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6-2 \\ 6-4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{b}$ ist also aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear erzeugt. In Bild 4.4 ist der Sachverhalt geometrisch dargestellt.

2) Wir wählen die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Faktoren $r_1 = 2$ und $r_2 = -1$. Wir erhalten:

$$\vec{b} = 2\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2 = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-1 \\ 2+2 \\ 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{b}$ ist also aus den Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear erzeugt. In Bild 4.5 ist der Sachverhalt geometrisch dargestellt.

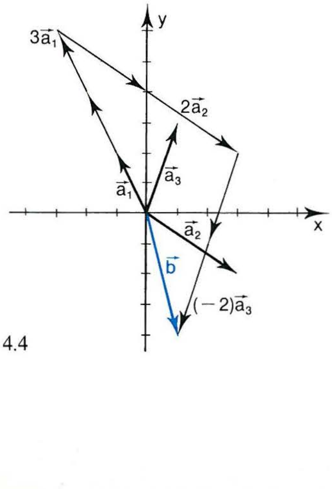


Bild 4.4

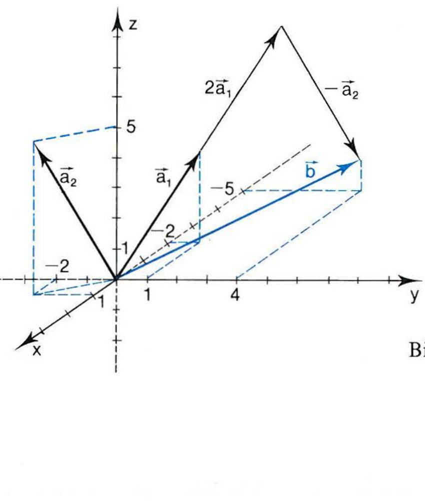


Bild 4.5

5. Die beiden vorstehenden Beispiele weisen einen wesentlichen Unterschied auf, der auf den ersten Blick gar nicht auffällt, der aber trotzdem – wie wir noch sehen werden – sehr bedeutsam ist.
Bei **Beispiel 2)** kann man den Vektor $\vec{b}$ **nur** mit den Faktoren $r_1=2$ und $r_2=-1$ linear aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ erzeugen, eine andere Möglichkeit gibt es nicht. Dies können wir folgendermaßen nachweisen:

$$r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2=\vec{b} \quad \text{bedeutet:} \quad r_1\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+r_2\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix},$$

also

$$\begin{array}{rl|l|l} & -2r_1+r_2=-5 & \cdot 2 & \cdot 1\\ \wedge & r_1-2r_2=4 & \cdot 1 & \cdot 2\\ \wedge & 3r_1+5r_2=1 & & \end{array}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen erhält man mit den angegebenen Faktoren:

$$-3r_1=-6 \wedge -3r_2=3 \Leftrightarrow r_1=2 \wedge r_2=-1.$$

Die dritte Gleichung wird von diesen Zahlen ebenfalls erfüllt:

$$3r_1+5r_2=3\cdot 2+5\cdot(-1)=6-5=1.$$

Bei **Beispiel 1)** sind die Zahlen r_1, r_2 und r_3, mit denen man den Vektor $\vec{b}$ aus den vorgegebenen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear erzeugen kann, dagegen **nicht** eindeutig festgelegt. Es gibt zahlreiche weitere Möglichkeiten:

a) mit $s_1=-8$, $s_2=-3$ und $s_3=2$ erhält man:

$$(-8)\vec{a}_1+(-3)\vec{a}_2+2\vec{a}_3=(-8)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-9+2\\-16+6+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\vec{b};$$

b) mit $t_1=14$; $t_2=7$ und $t_3=-6$ erhält man:

$$14\vec{a}_1+7\vec{a}_2+(-6)\vec{a}_3=14\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+(-6)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14+21-6\\28-14-18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\vec{b};$$

c) mit $u_1=-\frac{5}{2}$; $u_2=-\frac{1}{2}$ und $u_3=0$ erhält man ebenfalls:

$$(-\tfrac{5}{2})\vec{a}_1+(-\tfrac{1}{2})\vec{a}_2+0\vec{a}_3=(-\tfrac{5}{2})\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+(-\tfrac{1}{2})\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\vec{b}.$$

Es erhebt sich natürlich die Frage, wie man diese Zahlen finden kann, welche Lösungen c_1, c_2, c_3 also die Gleichung $c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3=\vec{b}$ bzw. das zugehörige Gleichungssystem hat. Wir stellen diese Frage hier – und auch bei einigen weiteren Beispielen – noch zurück; wir werden uns in §6 und in §7 ausführlich mit linearen Gleichungssystemen befassen und in diesem Zusammenhang das hier auftretende Problem wieder aufgreifen.

6. Allgemein stellen sich, wenn n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ und dazu ein Vektor $\vec{b}$ gegeben sind, zwei Fragen:

1) Unter welchen Bedingungen ist der Vektor $\vec{b}$ aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ erzeugbar, unter welchen Bedingungen hat also das Gleichungssystem

$$r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\dots+r_n\vec{a}_n=\vec{b}$$

eine Lösung $(r_1|r_2\dots|r_n)$? (Frage nach der **Existenz** einer Lösung).

2) In welchen Fällen ist die Lösung eindeutig bestimmt; wann gibt es mehrere Lösungen? (Frage nach der **Eindeutigkeit** der Lösung).
Das Ziel unserer weiteren Überlegungen wird es u.a. sein, diese Fragen abschließend zu beantworten.

7. Beim letzten Beispiel ist besonders interessant der Fall c) wegen des dabei auftretenden Faktors $u_3=0$. Dies bedeutet, daß man den Vektor $\vec{a}_3$ gar nicht benötigt, um $\vec{b}$ aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear zu erzeugen.
Zeige, daß man $\vec{b}$ auch aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ bzw. aus $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear erzeugen kann, daß also je zwei der drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ genügen, um $\vec{b}$ zu erzeugen (Aufgabe 5a)!
Wir werden noch zu erläutern haben, worin dieser Sachverhalt begründet ist (Seite 48). Ebenso haben wir noch zu erörtern, warum bei Beispiel 2) die Zahlen r_1 und r_2 eindeutig festgelegt sind.

8. Die zeichnerische Darstellung in den Bildern 4.3 und 4.4 legt die Frage nahe, ob

bei **Beispiel 1)** z.B. der Vektor $\vec{a}_1$ auch aus den Vektoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ und $\vec{b}$,

bei **Beispiel 2)** z.B. der Vektor $\vec{a}_1$ auch aus den Vektoren $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$

erzeugbar ist. Diese Fragen kann man dadurch leicht beantworten, daß man die fraglichen Gleichungen jeweils nach $\vec{a}_1$ „auflöst“:

Zu 1): Es gilt: $\vec{b}=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2+(-2)\vec{a}_3 \Leftrightarrow 3\vec{a}_1=\vec{b}-2\vec{a}_2+2\vec{a}_3 \Leftrightarrow \vec{a}_1=\frac{1}{3}\vec{b}+(-\frac{2}{3})\vec{a}_2+\frac{2}{3}\vec{a}_3$.

Dies bedeutet, daß sich in der Tat der Vektor $\vec{a}_1$ aus den Vektoren $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ und $\vec{b}$ linear erzeugen läßt.
Zeige, daß sich auch $\vec{a}_2$ aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$ und $\vec{b}$ und ebenso $\vec{a}_3$ aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$ linear erzeugen läßt (Aufgabe 5b)!

Zu 2): Es gilt: $\vec{b}=2\vec{a}_1+(-1)\vec{a}_2 \Leftrightarrow 2\vec{a}_1=\vec{b}+\vec{a}_2 \Leftrightarrow \vec{a}_1=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}_2$.

Dies bedeutet, daß sich tatsächlich $\vec{a}_1$ aus $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$ linear erzeugen läßt. Zeige, daß sich auch $\vec{a}_2$ aus $\vec{a}_1$ und $\vec{b}$ erzeugen läßt (Aufgabe 6)!

9. Die vorstehenden Überlegungen machen deutlich, daß

bei **Beispiel 1)** zwischen den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{b}$,

bei **Beispiel 2)** zwischen den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$

eine **wechselseitige Abhängigkeit** besteht, an der alle Vektoren in **gleicher Weise** beteiligt sind. Es ist daher sinnvoll, die Sonderrolle, die jeweils der Vektor $\vec{b}$ hinsichtlich der Bezeichnung spielt, dadurch aufzuheben, daß man bei Beispiel 1) $\vec{a}_4$ statt $\vec{b}$, bei Beispiel 2) $\vec{a}_3$ statt $\vec{b}$ schreibt.
Außerdem kann man auch in der Gleichung die Tatsache, daß alle beteiligten Vektoren **„dieselbe Rolle spielen“**, dadurch zum Ausdruck bringen, daß man alle Vektoren auf **eine** Seite der Gleichung bringt.

Zu 1): Mit $\vec{a}_4$ statt $\vec{b}$ gilt: $\vec{a}_4=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2+(-2)\vec{a}_3 \Leftrightarrow \mathbf{3\vec{a}_1+2\vec{a}_2+(-2)\vec{a}_3+(-1)\vec{a}_4=\vec{0}}$.

Zu 2): Mit $\vec{a}_3$ statt $\vec{b}$ gilt: $\vec{a}_3=2\vec{a}_1+(-1)\vec{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{2\vec{a}_1+(-1)\vec{a}_2+(-1)\vec{a}_3=\vec{0}}$.

Allgemein hat die Gleichung, durch die die **wechselseitige Abhängigkeit** von n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erfaßt wird, die Form:

$$\mathbf{c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \ldots + c_n \vec{a}_n = \vec{0} \quad \text{mit } c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.}$$

10. Bei Beispiel 1) von Seite 43 haben wir gesehen, daß die Faktoren, durch die die Abhängigkeit von Vektoren ausgedrückt wird, **nicht immer eindeutig** bestimmt sind.

Beispiel:

Für die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ gilt (vergleiche Seite 45):

1) $3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \vec{0}$; **2)** $8\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$;

3) $14\vec{a}_1 + 7\vec{a}_2 - 6\vec{a}_3 - \vec{a}_4 = \vec{0}$; **4)** $\frac{5}{2}\vec{a}_1 + \frac{1}{2}\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}$.

Besonders interessant ist die vierte Gleichung, weil in ihr der Faktor von $\vec{a}_3$ den Wert 0 hat. Dies bedeutet, daß man die Gleichung 4) **nicht** nach $\vec{a}_3$ auflösen kann, während dies bei den Gleichungen 1), 2) und 3) durchaus möglich ist.
Die Gleichung 4) zeigt, daß in einer Gleichung der Form

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \ldots + c_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

die die **wechselseitige Abhängigkeit** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ zum Ausdruck bringt, einzelne der Zahlen c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ den Wert 0 haben können. Man kann die Gleichung dann nur nach **den** Vektoren $\vec{a}_k$ auflösen, für die $c_k \neq 0$ ist.
Wenn in der Gleichung $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \ldots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$ dagegen **alle** Zahlen c_k den Wert 0 haben: $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, dann kann man diese Gleichung nach **keinem** der vorkommenden Vektoren $\vec{a}_k$ auflösen, also aus dieser Gleichung auch **nicht** herleiten, daß einer der Vektoren sich aus den anderen linear erzeugen läßt. Außerdem ist die Gleichung

$$0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$$

allgemeingültig, also für beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erfüllt, kann also für sich genommen auch nichts über deren Abhängigkeit aussagen.
Wenn wir also die Abhängigkeit von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ mit Hilfe der Gleichung

$$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \ldots + c_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

definieren wollen, so müssen wir in die Definition die Bedingung aufnehmen, daß für **wenigstens eine** der Zahlen c_k gilt: $c_k \neq 0$.

Wir kommen damit zu der folgenden Definition:

D 4.2 **1) Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ heißen „linear abhängig“ genau dann, wenn es Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht sämtlich gleich 0 sind und für die gilt:**

$$\mathbf{c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + \ldots c_n \vec{a}_n = \vec{0}.}$$

2) Sind n Vektoren nicht linear abhängig, so nennt man sie „linear unabhängig“.

Bemerkungen:

1) Man erfaßt die Bedingung, daß nicht alle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gleich 0 sein dürfen, gelegentlich durch die Schreibweise: $(c_1|c_2|\ldots|c_n) \neq (0|0|\ldots|0)$.

2) Man spricht von „**linearer** Abhängigkeit", weil $c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ eine **lineare** Gleichung bzw. ein **lineares** Gleichungssystem ist.

3) In jeder Gleichung der Form $c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ wird der Nullvektor als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ dargestellt.

11. Wir behandeln einige **Beispiele.**

1) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$

Man erkennt sofort, daß $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_3$, also $1\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = \vec{0}$ ist; die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind also linear abhängig.

2) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}.$

Man erkennt sofort, daß $\vec{a}_3 = (-2)\vec{a}_2$, also $2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{0}$, und somit $0\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 1\vec{a}_3 = \vec{0}$ ist; also sind auch diese Vektoren linear abhängig.

3) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Bei diesen Vektoren ist nicht sofort zu erkennen, ob es Zahlen c_1, c_2, c_3 gibt, die nicht alle den Wert 0 haben und für die gilt:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}, \qquad \text{also } c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ausführlich geschrieben handelt es sich bei dieser Bedingung um das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & 2c_1 + c_2 - 2c_3 = 0 \\ \wedge\ & -c_1 - 2c_2 + 0c_3 = 0 \\ \wedge\ & 3c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0. \end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich $c_1 = 0$. Durch Einsetzen dieser Zahl in die zweite Gleichung erhält man $c_2 = 0$ und damit schließlich aus der ersten Gleichung auch $c_3 = 0$. Die **einzige** Lösung der Gleichung

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0} \text{ ist also: } c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Da keine dieser Zahlen von 0 verschieden ist, sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ **nicht** linear abhängig, also **linear unabhängig.**

Allgemein können wir festhalten:

S 4.1 Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ nur für $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ erfüllt ist, wenn also gilt:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0.$$

12. Wie oben bereits gezeigt, hat eine Gleichung der Form $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$ **stets** die Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = \ldots c_n = 0$. Man nennt diese Lösung daher die **„triviale Lösung"** dieser Gleichung.
Sind die betrachteten Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig, so existiert **zusätzlich** eine Lösung $(c_1|c_2|\ldots|c_n)$, in der für wenigstens eine Zahl c_k gilt: $c_k \neq 0$, also eine **„nichttriviale Lösung"** der fraglichen Gleichung. Wir können den Inhalt von Definition D 4.2 und von Satz 4.1 also auch folgendermaßen formulieren:

D 4.2 a Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ heißen „linear abhängig" genau dann, wenn die Gleichung

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt.

S 4.1 a Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Gleichung

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

13. Die Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, durch die die lineare Abhängigkeit von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ ausgedrückt wird, sind in keinem Fall eindeutig bestimmt. Mit

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

genügen in jedem Fall z.B. auch die Zahlen

$$2c_1, 2c_2, \ldots, 2c_n \quad \text{und die Zahlen} \quad -\tfrac{3}{7}c_1, -\tfrac{3}{7}c_2, \ldots, -\tfrac{3}{7}c_n,$$

allgemein die Zahlen

$$kc_1, kc_2, \ldots, kc_n \quad (\text{mit } k \neq 0)$$

der Bedingung. Man sagt: die Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sind in jedem Fall nur „bis auf einen Faktor" bestimmt. Beachte, daß dieser Faktor ungleich 0 sein muß!

__Beispiel:__ Die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig; denn mit den Zahlen $c_1 = 2$; $c_2 = -3$ und $c_3 = 1$ gilt:

$$2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6+4 \\ -6+3+3 \\ 4-3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Mit $c_1' = -3c_1 = -6$; $c_2' = -3c_2 = 9$ und $c_3' = -3c_3 = -3$ gilt aber auch:

$$-6\vec{a}_1 + 9\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 = -6\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6+18-12\\18-9-9\\-12+9+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

14. Es kann aber auch sein, daß es außer den Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ weitere Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ gibt, die **nicht** Vielfache der c_k sind und ebenfalls die Bedingung für die lineare Abhängigkeit der gegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erfüllen. Wir haben dies oben bereits an Beispielen gezeigt (Seite 44). Wir behandeln ein weiteres

Beispiel: Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig; denn mit den Zahlen $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ und $c_4 = 3$ gilt:

$$(-2)\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + 3\vec{a}_4 = (-2)\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Mit den Zahlen $d_1 = 3$; $d_2 = -2$; $d_3 = 1$ und $d_4 = -8$ gilt aber ebenfalls:

$$3\vec{a}_1 + (-2)\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + (-8)\vec{a}_4 = 3\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} + (-8)\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Dabei gibt es **keine Zahl** k, für die $d_i = k c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ wäre.

Offen bleiben in diesem Zusammenhang zwei Fragen:

1) Wie kann man die betreffenden Zahlen finden? Darauf werden wir in §6 eingehen.

2) Worin liegt der Grund dafür, daß die lineare Abhängigkeit dieser Vektoren durch Zahlen c_1, c_2, c_3, c_4 und durch Zahlen d_1, d_2, d_3, d_4 ausgedrückt werden kann, die nicht zueinander proportional sind? Auch dieses Problem werden wir unten klären.

Übungen und Aufgaben

1. Berechne den Vektor $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3$!

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; $r_1 = -2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $r_1 = 3$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$.

2. Berechne den Vektor $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3 + r_4\vec{a}_4$!

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $r_1 = 2$, $r_2 = -3$, $r_3 = -2$, $r_4 = 4$

3. Prüfe jeweils, ob der eine Vektor aus dem anderen linear erzeugt werden kann!

a) $\begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -28 \end{pmatrix}$

4. Begründe arithmetisch, daß sich bei den folgenden Vektorpaaren keiner der beiden Vektoren aus dem anderen linear erzeugen läßt! Begründe dies bei **a)** auch an Hand einer Zeichnung!

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ (vgl. Seite 43).

a) Zeige, daß sich $\vec{b}$ aus je zwei der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear erzeugen läßt!

b) Zeige, daß sich $\vec{a}_2$ aus $\vec{a}_1, \vec{a}_3$ und $\vec{b}$ und auch $\vec{a}_3$ aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}$ linear erzeugen läßt!

6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vgl. Seite 43). Zeige, daß $\vec{a}_2$ aus $\vec{a}_1$ und $\vec{b}$ linear erzeugt werden kann!

7. Stelle zeichnerisch und rechnerisch den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dar!

a) $b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

8. Zeige, daß sich $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear erzeugen lassen!

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

9. Zeige, daß sich der Vektor $\vec{b}$ auf mehrfache Weise aus den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ erzeugen läßt!

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. Prüfe, ob sich in Aufgabe 9 der Vektor $\vec{b}$ auch aus den Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ (oder aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ oder aus $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$) erzeugen läßt und ob dies auf mehrfache Weise möglich ist!

11. Bringe die folgenden Vektorgleichungen auf die Form $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ und zeige dadurch, daß die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ jeweils linear abhängig sind!

a) $\vec{a}_2 = -\frac{1}{4}\vec{a}_1$ **b)** $\frac{2}{3}\vec{a}_1 = -\frac{1}{2}\vec{a}_2$ **c)** $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = -\frac{1}{2}\vec{a}_1$ **d)** $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \vec{a}_2$

a) $2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$ **f)** $\frac{4}{7}\vec{a}_1 = 2\frac{1}{2}\vec{a}_2 - \frac{3}{7}\vec{a}_1$ **g)** $2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_1 = 2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$

12. Zeige, daß die drei Vektoren linear abhängig sind und daß sich jeder von ihnen aus den beiden anderen linear erzeugen läßt!

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

13. a) Zeige, daß die vier Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind!

b) Zeige, daß bereits je drei von den vier Vektoren linear abhängig sind!

14. Zeige, daß die vier Vektoren linear abhängig, die ersten drei Vektoren jedoch linear unabhängig sind!

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

II. Sätze zum Begriff der linearen Abhängigkeit

1. Wir wollen im folgenden einige einfache Sätze herleiten, die sich unmittelbar aus der Definition D 4.2 ergeben.

Nach den einführenden Überlegungen sind die Definition D 4.2 (bzw. D 4.2 a) und der Satz S 4.1 (bzw. S 4.1 a) zunächst nur auf Fälle mit $n \geq 2$ zu beziehen. Man kann sie rein formal aber auch für $n = 1$ anwenden.

Die Gleichung $c_1 \vec{a}_1 = \vec{0}$ ist für eine Zahl c_1 mit $c_1 \neq 0$ nur erfüllt, wenn $\vec{a}_1 = \vec{0}$ ist. Für $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ gilt nämlich: $c_1 \vec{a}_1 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = 0$.

Somit können wir sagen:

S 4.2 **1) Ein Vektor $\vec{a}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $\vec{a} = \vec{0}$ ist.**

2) Ein Vektor $\vec{a}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist.

2. Wenn man von dem soeben behandelten Sonderfall eines einzelnen Vektors absieht, dann werden die Eigenschaften der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit (für $n \geq 2$) nicht von den **einzelnen** Vektoren $\vec{a}_k$ ausgesagt, sondern von der Gesamtheit dieser Vektoren. Daher sagt man gelegentlich auch: die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind **„voneinander linear abhängig"**.

Bemerkung: Aus dem genannten Grunde könnte es zweckmäßig erscheinen, die Eigenschaften der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der **Menge** der betreffenden Vektoren, also der Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ zuzuschreiben. Dieses Vorgehen würde aber in bestimmten Fällen zu Schwierigkeiten führen.

<u>**Beispiel**</u>: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wegen $\vec{a}_1 = \vec{a}_3$ ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Wegen $\vec{a}_1 = \vec{a}_3$ sind aber die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig, während die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängig sind. Begründe dies (Aufgabe 1)!

3. In den einführenden Überlegungen des I. Abschnittes haben wir die Frage, ob Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind, nur auf Vektoren bezogen, die sämtlich vom Nullvektor verschieden sind.
In Definition D4.2 wird der Nullvektor aber nicht ausdrücklich ausgeschlossen. Wir wollen also überlegen, wie die Frage nach linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit zu beantworten ist, wenn unter den Vektoren der Nullvektor vorkommt, wenn also z.B. $\vec{a}_1=\vec{0}$ ist. Die Bedingung von Definition D4.2 ist dann stets erfüllt; wählt man nämlich z.B. $c_1=1$ und $c_2=c_3=\ldots=c_n=0$, so gilt:

$$1\vec{0}+0\vec{a}_2+0\vec{a}_3+\ldots+0\vec{a}_n=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}+\ldots+\vec{0}=\vec{0}.$$

Da $c_1 \neq 0$ ist, sind die Vektoren $\vec{a}_1=\vec{0}$, $\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ nach Definition D4.2 linear abhängig. Es gilt also der Satz

S4.3 **Befindet sich unter den Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ der Nullvektor $\vec{0}$, so sind diese Vektoren linear abhängig.**

4. Falls n Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ linear abhängig sind, muß für wenigstens eine der Zahlen c_k gelten: $c_k \neq 0$. Daher kann man die Gleichung

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

nach dem zugehörigen Vektor $\vec{a}_k$ auflösen. Gilt z.B. $c_2 \neq 0$, so ergibt sich:

$$\vec{a}_2=-\frac{c_1}{c_2}\vec{a}_1-\frac{c_3}{c_2}\vec{a}_3-\ldots-\frac{c_n}{c_2}\vec{a}_n.$$

Dies bedeutet, daß **wenigstens einer** der Vektoren, in diesem Fall der Vektor $\vec{a}_2$, aus den anderen Vektoren linear erzeugbar ist.
Läßt sich umgekehrt wenigstens einer von n Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ aus den anderen linear erzeugen, dann sind die Vektoren auch linear abhängig. Gilt dies z.B. für den Vektor $\vec{a}_n$, dann gibt es Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ mit

$$\vec{a}_n=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\ldots+r_{n-1}\vec{a}_{n-1},$$

also $$r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\ldots+r_{n-1}\vec{a}_{n-1}+(-1)\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Wegen $-1 \neq 0$ sind $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ also linear abhängig. Entsprechend verfährt man, wenn sich ein anderer Vektor $\vec{a}_k$ aus den übrigen linear erzeugen läßt. Damit haben wir bewiesen:

S4.4 **Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ sind linear abhängig genau dann, wenn es unter ihnen wenigstens einen gibt, der sich aus den anderen linear erzeugen läßt.**

5. Sind n Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ linear unabhängig und läßt man einen davon weg, z.B. den Vektor $\vec{a}_n$, so sind auch die restlichen Vektoren linear unabhängig. Für linear unabhängige Vektoren gilt nämlich nach Satz S4.1:

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_n\vec{a}_n=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=\ldots=c_n=0.$$

Würde die Gleichung $c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_{n-1}\vec{a}_{n-1}=\vec{0}$ von Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ erfüllt, die nicht alle gleich 0 sind (z.B. $c_k \neq 0$), so würde mit diesen Zahlen auch gelten:

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+\ldots+c_k\vec{a}_k+\ldots+c_{n-1}\vec{a}_{n-1}+0\vec{a}_n=\vec{0};$$

die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ wären entgegen der Voraussetzung also nicht linear unabhängig, sondern linear abhängig. Damit haben wir bewiesen:

S 4.5 **Läßt man bei n linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ einen Vektor weg, so sind die restlichen Vektoren ebenfalls linear unabhängig.**

6. Fügt man umgekehrt zu n unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ einen weiteren Vektor $\vec{a}_{n+1}$ hinzu, so kann man über die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ nichts aussagen. Bestätige dies an selbstgewählten Beispielen (Aufgabe 2). Sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ dagegen linear abhängig, so sind nach Hinzunahme eines weiteren Vektors $\vec{a}_{n+1}$ auch die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ voneinander abhängig. Dabei muß der hinzugefügte Vektor natürlich von „derselben Art“ sein, also genau so viele Koordinaten haben wie die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$. Es gilt der Satz

S 4.6 **Fügt man zu n linear abhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ einen Vektor $\vec{a}_{n+1}$ hinzu, so sind auch die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n+1}$ linear abhängig.**

Der Beweis soll in Aufgabe 3 geführt werden.

Übungen und Aufgaben

1. Begründe, daß drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig sind, wenn z.B. $\vec{a}_1 = \vec{a}_3$ ist!

2. Gegeben sind die linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ermittle zwei Vektoren $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$, so daß

a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig; **b)** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ linear abhängig sind!

3. Beweise den Satz S 4.6!

4. Zeige mit Hilfe von Definition D 4.2, daß wenigstens zwei Zahlen c_i, c_k $(i \neq k)$ von Null verschieden sein müssen, wenn unter den linear abhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ der Nullvektor nicht vorkommt!

5. Zeige, daß die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}$ linear abhängig sind, wenn gilt $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n$! Zeige ferner, daß wenigstens eine Zahl r_k von Null verschieden sein muß, wenn $\vec{b}$ nicht der Nullvektor ist!

6. Zeige, daß vier Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig sind, wenn schon

a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2$; **b)** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig sind!

7. Zeige allgemein: Wenn zwei Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear abhängig sind, dann sind auch die folgenden Paare von Vektoren linear abhängig!

a) $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ **b)** $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ und $\vec{a}_2$ **c)** $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ und $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$

d) $\vec{a}_1$ und $t\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ **e)** $r\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$ und $\vec{a}_2$ **f)** $r\vec{a}_1$ und $s\vec{a}_2$

III. Lineare Abhängigkeit bei ebenen und räumlichen Vektoren

1. Wir wollen uns im folgenden überlegen, welche Bedeutung der Begriff der linearen Abhängigkeit für ebene und für räumliche Vektoren hat.
Wir untersuchen zunächst, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn **zwei** ebene oder **zwei** räumliche Vektoren linear abhängig sind.

Beispiele:

1) Die beiden Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig; denn es gilt z.B.:

$$3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = 3\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-18 \\ -24+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Man kann diese Gleichung z.B. nach $\vec{a}_2$ auflösen; es ergibt sich:

$$2\vec{a}_2 = 3\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{a}_2 = \tfrac{3}{2}\vec{a}_1.$$

Dies bedeutet, daß es sich um **parallele Vektoren** handelt; wegen $\frac{3}{2} > 0$ sind diese Vektoren sogar gleichorientiert.

2) Die beiden Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig; denn es gilt z.B.:

$$5\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 = 5\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-15 \\ -45+45 \\ 30-30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Auch diese Gleichung kann man z.B. nach $\vec{a}_2$ auflösen; es ergibt sich:

$$3\vec{a}_2 = -5\vec{a}_1 \Leftrightarrow \vec{a}_2 = -\tfrac{5}{3}\vec{a}_1.$$

Auch dies bedeutet, daß es sich um **parallele Vektoren** handelt; wegen $-\frac{5}{3} < 0$ sind diese Vektoren entgegengesetzt orientiert.

Bemerkung: Da parallele Vektoren Vertreter besitzen, die auf derselben Geraden (lat. linea recta) liegen, nennt man solche Vektoren auch **„kollinear“**. Wir werden dieses Wort im folgenden meist verwenden.

2. Was wir an den Beispielen erkannt haben, gilt allgemein: sind zwei ebene oder zwei räumliche Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear abhängig, so sind sie kollinear (parallel). Denn für solche Vektoren gibt es nach Definition D 4.1 zwei Zahlen c_1 und c_2 mit

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0},$$

wobei wenigstens eine dieser Zahlen von 0 verschieden ist.

1) Ist $c_1 \neq 0$, so ergibt sich: $\vec{a}_1 = -\dfrac{c_2}{c_1}\vec{a}_2$;

2) Ist $c_1 = 0$, so muß $c_2 \neq 0$ sein und es ergibt sich: $\vec{a}_2 = -\dfrac{c_1}{c_2}\vec{a}_1$.

In beiden Fällen sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear.

Beachte: Dies gilt auch, wenn $\vec{a}_1$ oder $\vec{a}_2$ der Nullvektor ist!

3. Man kann vermuten, daß auch das Umgekehrte gilt, daß nämlich zwei parallele Vektoren stets linear abhängig sind. Dabei haben wir zu beachten, daß unter den beiden Vektoren der Nullvektor sein kann.
Sind zwei Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ zueinander parallel und ist $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, so gibt es stets eine Zahl r mit

$$\vec{a}_2 = r\vec{a}_1, \quad \text{also } r\vec{a}_1 + (-1)\vec{a}_2 = \vec{0};$$

ist $\vec{a}_2 \neq \vec{0}$, so gibt es eine Zahl s mit

$$\vec{a}_1 = s\vec{a}_2, \quad \text{also } 1\vec{a}_1 + (-s)\vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Für $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$ gilt z.B. $1\vec{a}_1 + 1\vec{a}_2 = \vec{0}$.
In allen Fällen ist also die Bedingung für die lineare Abhängigkeit von Definition D4.2 erfüllt. Damit haben wir bewiesen:

S 4.7 **Zwei ebene oder zwei räumliche Vektoren sind linear abhängig genau dann, wenn sie parallel (kollinear) sind.**

4. Als nächstes wollen wir untersuchen, welche geometrische Bedeutung es hat, wenn **drei** (ebene oder räumliche) Vektoren linear abhängig sind. Nach Definition D4.2 gibt es dann drei Zahlen c_1, c_2, c_3 mit

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0},$$

wobei wenigstens eine der Zahlen von 0 verschieden ist. Wir erörtern hier nur den Fall, daß $c_3 \neq 0$ ist. Alle anderen Fälle sind analog zu behandeln oder können durch Umbenennung der Vektoren auf diesen Fall zurückgeführt werden.
Ist also z.B. $c_3 \neq 0$, so kann man die Gleichung nach $\vec{a}_3$ auflösen; man erhält:

$$\vec{a}_3 = -\frac{c_1}{c_3}\vec{a}_1 - \frac{c_2}{c_3}\vec{a}_2.$$

Zur Vereinfachung führen wir die folgenden Abkürzungen ein: $r_1 = -\frac{c_1}{c_3}$ und $r_2 = -\frac{c_2}{c_3}$;

dann gilt: $\vec{a}_3 = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2$ (mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$). [1]

Hier haben wir nun die folgenden Fälle zu unterscheiden:

1) Sind bereits $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear abhängig, also kollinear, so ist auch $\vec{a}_3$ zu beiden Vektoren kollinear.

<u>Beispiele:</u>

a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Es gilt: $2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+6-12 \\ -2-2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$, also $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2$.
Wegen $\vec{a}_2 = -2\vec{a}_1$ sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear; daher ist auch $\vec{a}_3$ zu $\vec{a}_1$ und zu $\vec{a}_2$ kollinear; in der Tat gilt:

$$\vec{a}_3 = 4\vec{a}_1 \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = 2\vec{a}_2.$$

b) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+9-6\\1-3+2\\2-6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$, also $\vec{a}_3=\vec{a}_1+\vec{a}_2$.

Wegen $\vec{a}_2=-3\vec{a}_1$ sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear; daher ist auch $\vec{a}_3$ zu $\vec{a}_1$ und zu $\vec{a}_2$ kollinear; in der Tat gilt: $\vec{a}_3=-2\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3=\frac{2}{3}\vec{a}_2$.

Wir können den Sachverhalt selbstverständlich auch allgemein beweisen.

α) Ist $\vec{a}_1=\vec{0}$, so gilt: $1\vec{a}_1+0\vec{a}_3=\vec{0}$; und nach Gleichung [1] ist $\vec{a}_3=r_2\vec{a}_2$;
β) Ist $\vec{a}_2=\vec{0}$, so gilt: $1\vec{a}_2+0\vec{a}_3=\vec{0}$; und nach Gleichung [1] ist $\vec{a}_3=r_1\vec{a}_1$.

Daher ist $\vec{a}_3$ in beiden Fällen sowohl mit $\vec{a}_1$ wie mit $\vec{a}_2$ kollinear.

γ) Ist dagegen $\vec{a}_1\neq\vec{0}$ und $\vec{a}_2\neq\vec{0}$, so gibt es eine Zahl s mit $s\neq 0$ und

$$\vec{a}_2=s\vec{a}_1, \quad \text{also } \vec{a}_1=\frac{1}{s}\vec{a}_2;$$

daraus ergibt sich:

$$\vec{a}_3=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2=r_1\vec{a}_1+r_2(s\vec{a}_1)=r_1\vec{a}_1+(r_2 s)\vec{a}_1=(r_1+r_2 s)\vec{a}_1$$

und

$$\vec{a}_3=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2=r_1\left(\frac{1}{s}\vec{a}_2\right)+r_2\vec{a}_2=\frac{r_1}{s}\vec{a}_2+r_2\vec{a}_2=\left(\frac{r_1}{s}+r_2\right)\vec{a}_2.$$

Also ist auch in diesem Fall $\vec{a}_3$ sowohl mit $\vec{a}_1$ wie mit $\vec{a}_2$ kollinear, q.e.d.

2) Sind die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängig, also **nicht** zueinander parallel, so haben wir bei der Bedingung

$$\vec{a}_3=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2$$

drei Fälle zu unterscheiden. Sind beide Zahlen r_1 und r_2 von 0 verschieden ($r_1, r_2\neq 0$), so liegt eine Situation vor, wie sie in Bild 4.6 dargestellt ist. Die beiden anderen Fälle mit $r_2=0$, also $\vec{a}_3=r_1\vec{a}_1$ und $r_1=0$, also $\vec{a}_3=r_2\vec{a}_2$ sind in den Bildern 4.7 und 4.8 dargestellt.

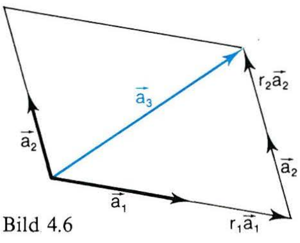


Bild 4.6

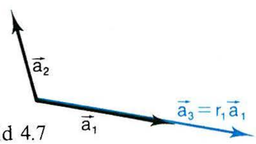


Bild 4.7

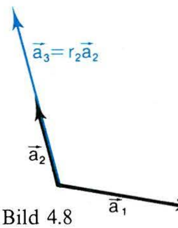


Bild 4.8

In allen diesen Fällen gibt es Vertreter der drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, die in **einer** Ebene liegen.
Dies ist für **ebene** Vektoren selbstverständlich; bei **räumlichen** Vektoren liegt dagegen ein Sonderfall vor; denn in den meisten Fällen gibt es für drei räumliche Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ keine Vertreter, die in derselben Ebene liegen.

Wir definieren:

D 4.3 Vektoren heißen „komplanar" genau dann, wenn es Repräsentanten der Vektoren gibt, die in derselben Ebene liegen.

Bemerkungen:

1) Der Begriff der Komplanarität ist normalerweise nur auf **räumliche** Vektoren anzuwenden. Daß ebene Vektoren komplanar sind, ist selbstverständlich; denn die Vertreter ebener Vektoren liegen natürlich alle in derselben Ebene.

2) Kollineare (parallele) Vektoren sind erst recht komplanar; vergleiche die Beispiele **a)** und **b)** von Seite 55!
Das Ergebnis unserer Überlegungen halten wir für räumliche Vektoren fest im Satz:

S 4.8 Wenn drei räumliche Vektoren linear abhängig sind, dann sind sie komplanar.

5. Es ist zu vermuten, daß auch zu diesem Satz die Umkehrung gilt, daß also drei komplanare Vektoren stets auch linear abhängig sind.
Wir wollen den Beweis für diesen Sachverhalt so führen, daß er den **Sonderfall ebener Vektoren** – die ja trivialerweise komplanar sind – mit enthält. Wir beweisen also gleichzeitig, daß drei ebene Vektoren **stets** linear abhängig sind.
Wir haben wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Sind zwei der drei Vektoren – z.B. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ – kollinear, also linear abhängig, dann gibt es zwei Zahlen c_1, c_2 mit $(c_1|c_2) \neq (0|0)$, so daß gilt:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0},$$

also auch

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 = \vec{0} \quad (\text{mit } c_1 \neq 0 \text{ oder } c_2 \neq 0).$$

Dies bedeutet, daß diese drei Vektoren linear abhängig sind.
Beachte, daß auch $\vec{a}_1 = \vec{0}$ oder $\vec{a}_2 = \vec{0}$ sein kann!

2) Wenn unter den drei Vektoren sich keine zwei befinden, die kollinear sind, dann haben drei Pfeile $\overrightarrow{UA_1}$, $\overrightarrow{UA_2}$ und $\overrightarrow{UA_3}$, die als Vertreter der drei Vektoren an einem Punkt U angetragen werden, paarweise verschiedene Richtungen. In Bild 4.9 sind durch die Spitze A_3 des Pfeils zu $\vec{a}_3$ Parallelen zu den beiden anderen Pfeilen eingezeichnet. Diese schneiden die Geraden $g_1(U, A_1)$ und $g_2(U, A_2)$ in zwei Punkten B_1 und B_2. Die Pfeile $\overrightarrow{UB_1}$ und $\overrightarrow{UB_2}$ sind Vertreter zweier Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$, die zu $\vec{a}_1$ bzw. $\vec{a}_2$ kollinear sind. Daher gibt es zwei Zahlen $c_1, c_2 \neq 0$ mit

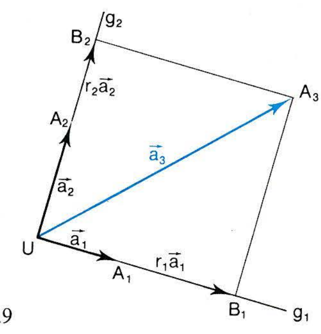


Bild 4.9

$$\vec{b}_1 = c_1\vec{a}_1 \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = c_2\vec{a}_2.$$

Somit gilt: $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$, also $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = \vec{0}$.
Daher sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ tatsächlich linear abhängig.
Damit haben wir zwei Sätze bewiesen, einen für ebene, einen für räumliche Vektoren, nämlich:

S 4.9 Drei ebene Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind stets linear abhängig.

S 4.10 Drei räumliche Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind linear abhängig genau dann, wenn sie komplanar sind.

Bemerkung: Wir haben den Beweis für die beiden vorstehenden Sätze durch geometrische Überlegungen geführt. Für **ebene** Vektoren (Satz S 4.9) kann man den Beweis auch arithmetisch führen. Wir werden uns in §7 mit dieser Frage beschäftigen.

6. Aus Satz S 4.9 ergibt sich unmittelbar, daß man aus der Menge V_2 **höchstens zwei linear unabhängige Vektoren** $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ herausgreifen kann. Mit Hilfe zweier solcher Vektoren kann man jeden weiteren ebenen Vektor $\vec{a}_3$ linear erzeugen. In Bild 4.10 sind drei Beispiele dargestellt.

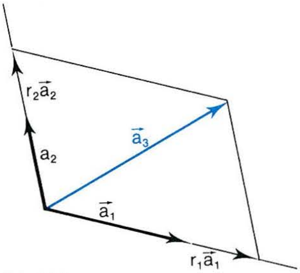


Bild 4.10a

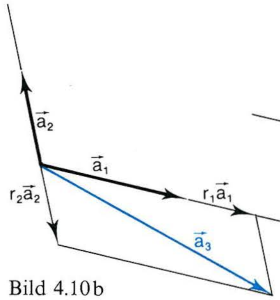


Bild 4.10b

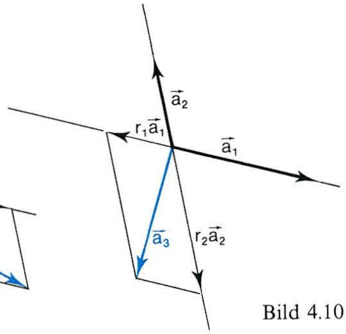


Bild 4.10c

In allen drei Fällen gilt: $\vec{a}_3 = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2$; für die Zahlenfaktoren r_1, r_2 gilt in

Bild 4.10a: $r_1 > 0 \wedge r_2 > 0$; Bild 4.10b: $r_1 > 0 \wedge r_2 < 0$; Bild 4.10c: $r_1 < 0 \wedge r_2 < 0$.

Man sagt: zwei linear unabhängige ebene Vektoren „spannen die Ebene auf"; sie bilden eine **„Basis"** der Ebene.
Der einfachste Fall einer Basis liegt vor bei den Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies sind die Basisvektoren eines Koordinatensystems (Bild 4.11).
Wir haben diese Vektoren mit dem Buchstaben „e" bezeichnet, weil sie den Betrag 1 haben:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1.$$

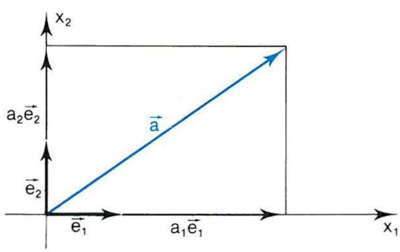


Bild 4.11

Bemerkung: Man nennt Vektoren, die den Betrag 1 haben, **„Einheitsvektoren"**.

Jeder ebene Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist aus den Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ erzeugbar; es gilt:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ 0 + a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ (Bild 4.11, Seite 58).}$$

7. In der gleichen Weise wird auch eine im Raum R_3 liegende Ebene ε von **zwei** linear unabhängigen räumlichen Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannt, falls diese Vektoren Vertreter haben, die in der betreffenden Ebene liegen; denn nach Satz S4.10 ist jeder weitere mit $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ komplanare Vektor $\vec{a}_3$ von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear abhängig, also aus diesen erzeugbar.
Wählt man zwei Vertreter von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$, die von einem Punkt U der Ebene ausgehen, so gibt es zu jedem Punkt A der Ebene einen Pfeil $\overrightarrow{UA}$, dessen Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dargestellt werden kann:

$$\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 \quad \text{(Bild 4.12).}$$

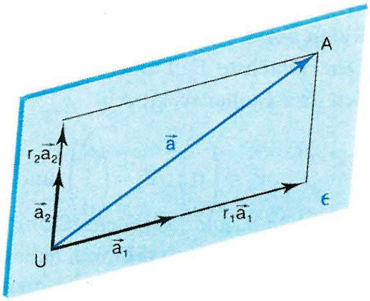


Bild 4.12

Beachte, daß jede zur Ebene ε parallele Ebene ε_1 ebenfalls von den Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannt wird! Wir werden in §5 darauf zu sprechen kommen, wie solche Ebenen in ihrer Darstellung zu unterscheiden sind.

8. In Satz S4.9 ist ausgesagt, daß drei ebene Vektoren stets linear abhängig sind. Man kann vermuten, daß eine analoge Aussage für vier räumliche Vektoren gilt:

S4.11 Vier räumliche Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ sind stets linear abhängig.

Beweis: Wenn sich unter den vier Vektoren drei Vektoren befinden, die komplanar sind, so sind alle vier linear abhängig. Begründe dies im einzelnen (Aufgabe 12b)!
Wir brauchen uns also nur mit dem Fall zu beschäftigen, daß unter den vier Vektoren sich kein Tripel komplanarer Vektoren befindet. Dann kann man wiederum jeden der vier Vektoren, z.B. $\vec{a}_4$, durch die drei anderen linear erzeugen.

In Bild 4.13 ist der Sachverhalt dargestellt: man trägt Vertreter aller vier Vektoren an einem Punkt U an und zeichnet durch die Spitze A_4 des Pfeils zu $\vec{a}_4$ die Parallele zu $\vec{a}_3$. Diese schneidet die von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ „aufgespannte" Ebene in einem Punkt B. Der Pfeil $\overrightarrow{UB}$ ist Vertreter eines Vektors $\vec{b}$, der mit $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ komplanar ist, den man also aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ erzeugen kann:

$$\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 \quad \text{mit } r_1, r_2 \neq 0.$$

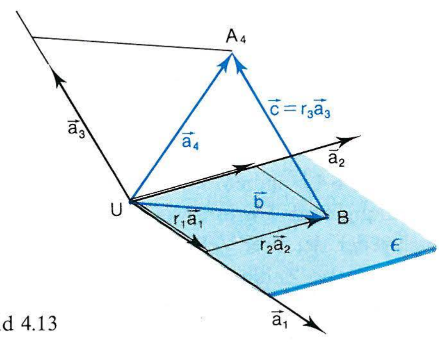


Bild 4.13

Der Pfeil $\overrightarrow{BA_4}$ ist Vertreter eines Vektors $\vec{c}$, der kollinear zu $\vec{a}_3$ ist, für den also gilt:

$$\vec{c}=r_3\vec{a}_3 \quad \text{mit } r_3 \neq 0.$$

Insgesamt gilt also:

$$\vec{a}_4=\vec{b}+\vec{c}=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+r_3\vec{a}_3, \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung: Man kann auch diesen Satz arithmetisch beweisen. Vergleiche §7, III!

9. Aus Satz S4.11 ergibt sich, daß man aus der Menge V_3 höchstens drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ herausgreifen kann; jeder weitere räumliche Vektor $\vec{a}_4$ kann dann aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear erzeugt werden. Man sagt: drei linear unabhängige Vektoren **„spannen den Raum auf"**; sie bilden eine **„Basis"** des dreidimensionalen Raumes.

Der einfachste Fall einer Basis liegt vor bei den drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dies sind die Basisvektoren eines Koordinatensystems (Bild 4.14). Man kann jeden räumlichen Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ aus diesen Basisvektoren erzeugen; es gilt (Bild 4.14):

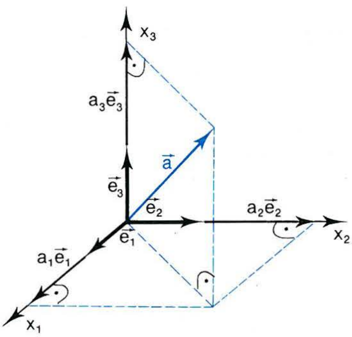


Bild 4.14

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

$$=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+0+0\\0+a_2+0\\0+0+a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\vec{a}.$$

10. Im I. Abschnitt (Seite 48) haben wir an einem Beispiel gezeigt, daß sich ein ebener Vektor $\vec{b}$ in mehrfacher Weise aus drei ebenen Vektoren linear erzeugen läßt. Wir können jetzt erklären, worin dieser Sachverhalt begründet ist. Wir greifen das **Beispiel** von Seite 43 wieder auf:

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix};\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix};\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}.$$

Wie oben gezeigt, gilt u.a.

1) $\vec{b}=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2+(-2)\vec{a}_3$, **2)** $\vec{b}=-8\vec{a}_1-3\vec{a}_2+2\vec{a}_3$ und **3)** $\vec{b}=-\frac{5}{2}\vec{a}_1-\frac{1}{2}\vec{a}_2+0\vec{a}_3$.

In Satz S4.5 haben wir festgestellt, daß drei ebene Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ **stets** linear abhängig sind. Da in unserem Fall alle drei Vektoren vom Nullvektor verschieden sind, läßt sich jeder der drei Vektoren aus den beiden anderen linear erzeugen, z.B. $\vec{a}_3$ aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$. Es muß also Zahlen r_1, r_2 geben mit

$$r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2=\vec{a}_3.$$

Wir lösen das sich aus dieser Bedingung ergebende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rl|l|l} & -r_1+3r_2=1 & \cdot 2 & \cdot 2 \\ \wedge & 2r_1-2r_2=3 & \cdot 3 & \cdot 1 \end{array}$$

mit Hilfe der angegebenen Faktoren; es ergibt sich:

$$4r_1=11 \wedge 4r_2=5 \Leftrightarrow r_1=\tfrac{11}{4} \wedge r_2=\tfrac{5}{4}.$$

Tatsächlich gilt:

$$\tfrac{11}{4}\vec{a}_1+\tfrac{5}{4}\vec{a}_2=\tfrac{11}{4}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\tfrac{5}{4}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-11+15\\22-10\end{pmatrix}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\vec{a}_3.$$

Wir können also in den Gleichungen 1) und 2) $\vec{a}_3$ durch $\tfrac{11}{4}\vec{a}_1+\tfrac{5}{4}\vec{a}_2$ ersetzen. Wir erhalten:

1) $\vec{b}=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2-2\vec{a}_3=3\vec{a}_1+2\vec{a}_2-2(\tfrac{11}{4}\vec{a}_1+\tfrac{5}{4}\vec{a}_2)=(3-\tfrac{11}{2})\vec{a}_1+(2-\tfrac{5}{2})\vec{a}_2=-\tfrac{5}{2}\vec{a}_1-\tfrac{1}{2}\vec{a}_2;$

2) $\vec{b}=-8\vec{a}_1-3\vec{a}_2+2\vec{a}_3=-8\vec{a}_1-3\vec{a}_2+2(\tfrac{11}{4}\vec{a}_1+\tfrac{5}{4}\vec{a}_2)$
$\quad=(-8+\tfrac{11}{2})\vec{a}_1+(-3+\tfrac{5}{2})\vec{a}_2=-\tfrac{5}{2}\vec{a}_1-\tfrac{1}{2}\vec{a}_2.$

Auf diese Weise kann man aus den beiden Gleichungen 1) und 2) die Gleichung 3) herleiten. Der Grund für den in Rede stehenden Sachverhalt ist also die Tatsache, daß die drei Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, aus denen der Vektor $\vec{b}$ erzeugt wird, ihrerseits bereits linear abhängig sind.

11. Anders ist die Situation bei **Beispiel 2)** von Seite 43. Wir haben dort gezeigt, daß der Vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}$ sich aus den Vektoren $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ und $a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ nur auf **eine** Weise linear erzeugen läßt, daß die betreffenden Faktoren r_1 und r_2 bei diesem Beispiel also **eindeutig** bestimmt sind. Der Grund liegt darin, daß die beiden Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ **linear unabhängig** sind. Daher kann jeder weitere räumliche Vektor $\vec{c}$ aus $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ nur auf **eine** Weise oder überhaupt nicht erzeugt werden. Man kann sich dies auf die folgende Weise allgemein klarmachen. Wir setzen voraus, daß zwei Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängig sind, daß also gilt:

$$c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=0.$$

Gilt nun für einen Vektor $\vec{b}$

$$\vec{b}=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2 \quad \text{und} \quad \vec{b}=s_1\vec{a}_1+s_2\vec{a}_2,$$

so erhält man durch Subtraktion der beiden Gleichungen und durch Anwendung des Distributivgesetzes:

$$(r_1-s_1)\vec{a}_1+(r_2-s_2)\vec{a}_2=\vec{0}.$$

Wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ folgt daraus:

$$r_1-s_1=0 \wedge r_2-s_2=0, \quad \text{also } r_1=s_1 \wedge r_2=s_2.$$

Die beiden Darstellungen des Vektors $\vec{b}$ sind also identisch; zwei verschiedene Darstellungen für $\vec{b}$ gibt es nicht.

12. Entsprechend ist die Situation auch bei Vektoren mit mehr als drei Koordinaten. Wir behandeln ein **Beispiel** für Vektoren mit vier Koordinaten. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Vektoren erzeugen wir einen weiteren Vektor $\vec{b}$:

$$3\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3+3-10 \\ -6+3+\ 2 \\ 3-6+\ 8 \\ 9-9+\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad [1].$$

Dieser Vektor $\vec{b}$ ist aus $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ auch auf die folgende Weise erzeugbar:

$$-\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3 = \vec{b} \qquad [2].$$

Der Grund für diesen Sachverhalt ist die Tatsache, daß die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear abhängig sind; es gilt nämlich

$$-2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 = \vec{0}, \qquad \text{also } \vec{a}_3 = -2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2.$$

Setzt man dies in die Gleichung [1] ein, so erhält man

$$\vec{b} = 3\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = 3\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_1 + 6\vec{a}_2 = -\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2, \qquad \text{also die Gleichung [2].}$$

13. Was wir an den vorstehenden Beispielen deutlich gemacht haben, läßt sich allgemein beweisen. Es gilt der Satz

S 4.12 Sind n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig, so läßt sich jeder Vektor $\vec{b}$ aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ auf höchstens eine Weise erzeugen.

Beweis: Aus $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n = s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_n\vec{a}_n$ ergibt sich durch Subtraktion der beiden Darstellungen:

$$(r_1 - s_1)\vec{a}_1 + (r_2 - s_2)\vec{a}_2 + \ldots + (r_n - s_n)\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Da $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ als linear unabhängig vorausgesetzt sind, folgt daraus nach Satz S 4.1:

$$r_1 - s_1 = 0 \wedge r_2 - s_2 = 0 \wedge \ldots \wedge r_n - s_n = 0,$$

also $\quad r_1 = s_1 \wedge r_2 = s_2 \wedge \ldots \wedge r_n = s_n$, q.e.d.

Beachte, daß der Satz S 4.12 **nicht** besagt, daß sich **jeder** Vektor $\vec{b}$ aus linear unabhängigen Vektoren erzeugen läßt!

Beispiel: Der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht erzeugbar, obwohl $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ linear unabhängig sind (Aufgabe 20).

14. Wir können nun auch erklären, warum die Erfassung der linearen Abhängigkeit der Vektoren

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix};\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix};\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

des Beispiels von Seite 49 auf mehrfache Weise möglich ist. Der Grund liegt darin, daß bereits je drei dieser vier Vektoren linear abhängig, also komplanar sind. So gilt z.B.

$$2\vec{a}_2+5\vec{a}_3-7\vec{a}_4=2\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-20+14\\2+5-7\\-10+10+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

Da sich $\vec{a}_1$ nach den Rechnungen von Seite 49 aus $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ erzeugen läßt, bedeutet dies, daß alle vier Vektoren komplanar sind. Schon aus zwei dieser vier Vektoren lassen sich die übrigen erzeugen. Zeige, daß sich z.B. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aus $\vec{a}_3$ und $\vec{a}_4$ erzeugen lassen (Aufgabe 22)!

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche zeichnerisch und rechnerisch, ob die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ kollinear, also linear abhängig sind!

a) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\-7{,}5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}8\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}6\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-8\\3{,}2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-1{,}2\end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}15\\-40\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}9\\-24\end{pmatrix}$

2. Zeige, daß die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ paarweise kollinear sind, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind!

a) $\vec{a}_3=\frac{1}{2}\vec{a}_1-\frac{2}{3}\vec{a}_2$ und $\vec{a}_1=\frac{1}{3}\vec{a}_2$ **b)** $\vec{a}_1=\frac{3}{4}\vec{a}_2-2\vec{a}_3$ und $3\vec{a}_2-7\vec{a}_1=\vec{0}$

3. Welchen Bedingungen müssen die Zahlen r und s genügen, wenn für zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ die folgende Beziehung gilt?

a) $r\vec{a}_1=s\vec{a}_2$ **b)** $(r-1)\vec{a}_1+(s-1)\vec{a}_2=\vec{0}$ **c)** $r\vec{a}_1+s\vec{a}_2=\frac{2}{9}(\vec{a}_1-\vec{a}_2)$

4. Ist es möglich, daß zwei Vektoren nicht kollinear sind, wenn

a) einer von ihnen der Nullvektor ist, **b)** beide Nullvektoren sind? Begründung!

5. Ein Parallelogramm sei definiert als ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten durch zwei Paare kollinearer Vektoren dargestellt werden können (Bild 4.15, Seite 64). $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien nicht kollinear.

a) Zeige vektoriell, daß die gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms jeweils gleich lang sind!

Anleitung: Zeige mit Hilfe des Begriffs der linearen Abhängigkeit, daß $r=s=1$ sein muß!

b) Zeige entsprechend, daß sich die Diagonalen eines Parallelogramms in ihrem Schnittpunkt S halbieren!

Anleitung: Betrachte die geschlossene Vektorkette zum Dreieck ABS!

c) Zeige entsprechend, daß sich die Diagonale DB und die Transversale AM (Bild 4.16, Seite 64) gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen! (M ist der Mittelpunkt der Strecke BC.)

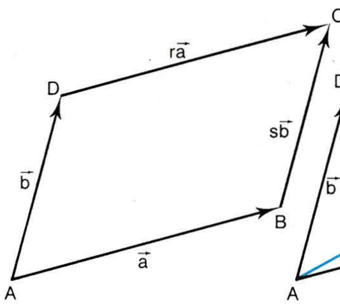


Bild 4.15

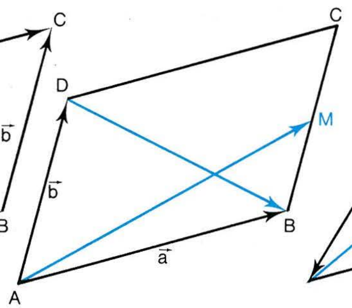


Bild 4.16

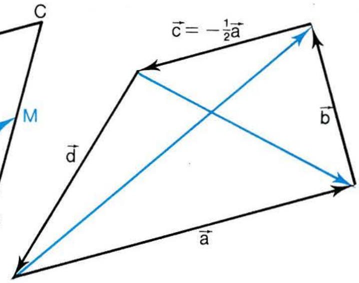


Bild 4.17

6. In einem Parallelogramm ABCD teile der Punkt T die Seite BC im Verhältnis 2 : 1 (allgemein m : n). Untersuche, in welchem Verhältnis AT die Diagonale DB teilt!
Hinweis: Verfahre wie in Aufgabe 5!

7. Ein Trapez sei durch Vertreter der vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ mit $\vec{a} = -2\vec{c}$ und $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ gegeben (Bild 4.17). In welchem Verhältnis teilen sich die Diagonalen?

8. Beweise vektoriell, daß sich in jedem Dreieck ABC die Seitenhalbierenden zweier Seiten wechselseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen und daß sich daher alle drei Seitenhalbierenden im gleichen Punkt S, dem sogenannten „Schwerpunkt", schneiden (Bild 4.18)!
Anleitung: Drücke zunächst die Vektoren $\vec{s}_a$ und $\vec{s}_b$ durch zwei Seitenvektoren des Dreiecks aus! Beachte dabei, daß $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ist!

9. Zeige vektoriell, daß das von den Seitenmittelpunkten eines Dreiecks ABC gebildete Dreieck $M_aM_bM_c$ denselben Schwerpunkt hat wie das Dreieck ABC (Bild 4.18)!

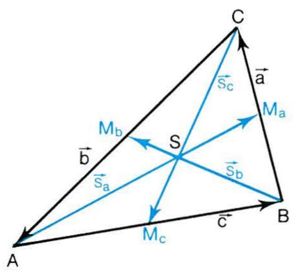


Bild 4.18

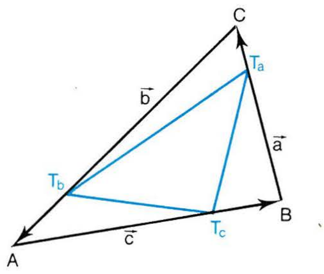


Bild 4.19

10. a) Die Punkte T_a, T_b und T_c teilen die Seitenvektoren eines Dreieckes ABC im Verhältnis 1 : n (m : n). Zeige vektoriell, daß das Dreieck $T_aT_bT_c$ den gleichen Schwerpunkt hat wie das Dreieck ABC (Bild 4.19)!
b) Untersuche vektoriell, in welchem Verhältnis sich die Strecken AT_a, BT_b und CT_c wechselseitig teilen!

11. Kann man aus den folgenden Beziehungen erschließen, daß die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ komplanar sind?

a) $3\vec{a}_1-5\vec{a}_2=2\vec{a}_1-\vec{a}_3$ **b)** $(\vec{a}_1+\vec{a}_2-\vec{a}_3)=\frac{1}{2}(\vec{a}_3-(\vec{a}_1-6\vec{a}_2))$

c) $4(\vec{a}_1-\vec{a}_2)+2(\vec{a}_2-\vec{a}_3)+2(\vec{a}_3+\vec{a}_2)=4\vec{a}_1$ **d)** $m\vec{a}_1+(m-n)\vec{a}_2=n\vec{a}_3,\quad m\neq 0$

12. Beweise folgende Sätze!

a) Sind unter drei Vektoren zwei kollinear, so sind die drei Vektoren komplanar.

b) Sind unter vier Vektoren drei komplanar, so sind die vier Vektoren linear abhängig.

13. Beweise, daß die drei Vektoren komplanar sind!
Behandle nur die Fälle, in denen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ nicht kollinear sind!

a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_1+\vec{a}_2$ **b)** $\vec{a}_1, \vec{a}_1+\vec{a}_2, \vec{a}_1-\vec{a}_2$ **c)** $\frac{1}{2}\vec{a}_1, \vec{a}_2-2\vec{a}_1, \vec{a}_1+2(\vec{a}_2-\vec{a}_1)$

14. Zeige, daß die folgenden Vektoren komplanar sind!

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

15. Bestimme zu den Vektoren in Aufgabe 14 jeweils einen vierten, der mit den gegebenen Vektoren komplanar ist!

16. Welchen Bedingungen müssen r, s und t genügen, wenn für drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ die folgende Beziehung gilt?

a) $(r-1)\vec{a}_1+(2s-1)\vec{a}_2+(2-t)\vec{a}_3=\vec{0}$

b) $2\vec{a}_1-r\vec{a}_2+(s-1)(\vec{a}_3-\vec{a}_1)=t\vec{a}_1-\vec{a}_2$

17. Untersuche, ob die folgenden Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind!

a) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-7\\4\\6\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\-4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\\-6\end{pmatrix}$

18. Bestimme die Koordinaten x, y, z so, daß folgende Gleichungen erfüllt sind! Was sagen die Gleichungen dann über die Vektoren aus?

a) $2\begin{pmatrix}x\\3\\1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2\\y\\4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}2\\2\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$ **b)** $3\begin{pmatrix}0\\x\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-2\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z\\-1\\4\end{pmatrix}=\vec{0}$

19. Bestimme die Koordinate x so, daß die folgenden Vektoren linear abhängig sind!
Gibt es mehr als eine Lösung?

a) $\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\x\\-5\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\5\\0\end{pmatrix}$

20. Zeige, daß der Vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ nicht aus den Vektoren $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ erzeugbar ist!

21. Ermittle zu $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ einen dritten Vektor $\vec{a}_3$, so daß $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig sind!

a) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$

22. Zeige, daß sich die Vektoren $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$ aus den Vektoren $\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_4=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ erzeugen lassen!

23. Untersuche am Parallelflach (Bild 4.20), ob die folgenden Vektoren komplanar sind!

a) die vier Raumdiagonalen,
b) die Vektoren zu $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{FD}$,
c) die Vektoren zu $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BG}$,
d) die Vektoren zu $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{DF}$,
e) die Vektoren zu $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AF}$.

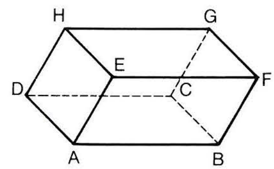


Bild 4.20

24. Untersuche vektoriell, ob die in Bild 4.21 und Bild 4.22 eingezeichneten Verbindungsstrecken benachbarter Kantenmitten am Parallelflach jeweils in einer Ebene liegen, ob sie also ebene Sechsecke bilden!
Anleitung: Drücke zunächst alle Vektoren zu den eingezeichneten Verbindungsstrecken durch die Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aus!
Untersuche dann zunächst die Komplanarität von je drei der sechs Vektoren und achte dabei auf Paare kollinearer Vektoren!

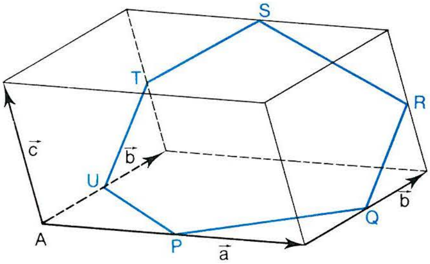


Bild 4.21

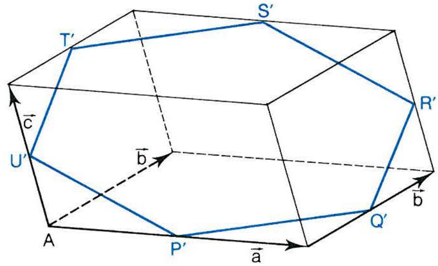


Bild 4.22

25. Stelle den dritten Vektor durch die beiden ersten zeichnerisch dar! Vergleiche Bild 4.10!

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

26. Bestätige den Satz S 4.11 für die folgenden Vektoren!

a) $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-2\\-6\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$

27. Zeige, daß sich bei den Vektoren von Aufgabe 26 der folgende Vektor aus den drei anderen linear erzeugen läßt! **a)** der vierte **b)** der erste **c)** der zweite

28. Bestimme die Koordinaten x, y, z jeweils so, daß die vier Vektoren linear abhängig sind! Zeige ferner, daß sich einer dieser Vektoren aus den drei anderen linear erzeugen läßt!

a) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\x\\y\\z\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\2\\-2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\y\\0\\z\end{pmatrix}$

29. Zeige, daß die gegebenen Vektoren linear abhängig sind! Diese Beispiele bestätigen einen allgemeinen Satz (vgl. die Sätze S 4.9 und S 4.11). Wie lautet der Satz?

a) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-7\\3\\-1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\7\\-2\end{pmatrix}$

30. Zeige, daß die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind!

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

31. Bilde n voneinander linear unabhängige Vektoren aus der Menge V_m!
Führe den arithmetischen Nachweis für die Richtigkeit deiner Angaben!

a) $n=2;\ m=2$ **b)** $n=2;\ m=3$ **c)** $n=3;\ m=3$
d) $n=2;\ m=4$ **e)** $n=4;\ m=4$ **f)** $n=5;\ m=5$

§ 5 Die Parameterdarstellung von Geraden und von Ebenen

I. Die Parameterdarstellung von Geraden

1. In §1, I haben wir den Grundgedanken der analytischen Geometrie erläutert: den **geometrischen Objekten** und den zwischen ihnen bestehenden **Beziehungen** werden **arithmetische Objekte** und **arithmetische Beziehungen** zugeordnet; genau dann, wenn die geometrischen Objekte in einer geometrischen Beziehung zueinander stehen, stehen die zugeordneten arithmetischen Objekte in der zugeordneten arithmetischen Beziehung.
Nachdem wir den Vektorbegriff mit den grundlegenden Verknüpfungen der Addition und der S-Multiplikation entwickelt haben, können wir nunmehr einen ersten Schritt zum Aufbau der analytischen Geometrie tun. Dabei erlaubt uns der Vektorbegriff, sofort räumliche Geometrie zu treiben. Der Unterschied zwischen der Ebene (man spricht auch vom „Raum R_2") und dem dreidimensionalen Raum (dem „Raum R_3") wird nur darin sichtbar, daß die Vektoren des R_2 zwei, die des R_3 drei Koordinaten haben.

2. Es liegt zunächst nahe, jeden **Punkt** (der Ebene R_2 oder des Raumes R_3) durch denjenigen **Vektor** zu erfassen, dessen Koordinaten mit denen des betreffenden Punktes übereinstimmen.

Beispiele:

1) Wir erfassen den Punkt P(2|3) in Bild 5.1 durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) Wir erfassen den Punkt P(3|5|7) in Bild 5.2 durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Man spricht in diesen Fällen jeweils von einem **„Ortsvektor"**. Wir bezeichnen Ortsvektoren mit $\vec{x}, \vec{x}_0, \vec{x}_1$, usw.
In der Regel stellen wir außerdem einen Ortsvektor $\vec{x}$ durch seinen am Nullpunkt angetragenen Repräsentanten $\overrightarrow{OP}$ dar.

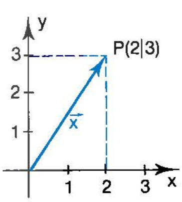


Bild 5.1

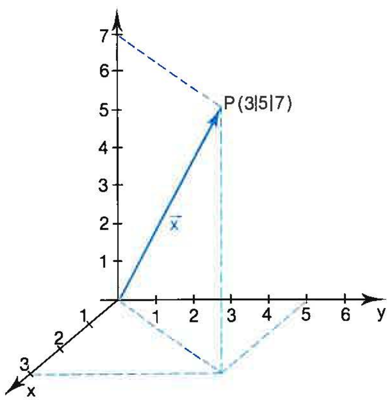


Bild 5.2

Wir definieren:

D5.1 Unter dem „Ortsvektor zum Punkt P" verstehen wir denjenigen Vektor $\vec{x}$, dessen Koordinaten mit den Koordinaten von P übereinstimmen. Der am Nullpunkt angetragene Pfeil $\overrightarrow{OP}$ ist also ein Repräsentant des Ortsvektors $\vec{x}$.

3. Als nächstes wenden wir uns dem Problem der analytischen Beschreibung von **Geraden** zu. Schon im Unterricht der Sekundarstufe I haben wir uns mit Geraden beschäftigt und dabei verschiedene Formen von Geradengleichungen kennengelernt. Diese beziehen sich aber stets auf Geraden in der x-y-Ebene. Mit Hilfe der Vektormethode können wir Geraden im Raum R_3 grundsätzlich genau so erfassen wie Geraden in der Ebene R_2; der Unterschied liegt lediglich in der Anzahl der Koordinaten der betreffenden Vektoren.

4. Die einfachste Möglichkeit, eine Gerade festzulegen, besteht darin, zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 vorzugeben, die auf der Geraden liegen. Wir fragen uns, wie man mit Hilfe der Ortsvektoren $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ dieser Punkte jeden anderen Punkt P der Geraden bzw. dessen Ortsvektor $\vec{x}$ erfassen kann (Bild 5.3).

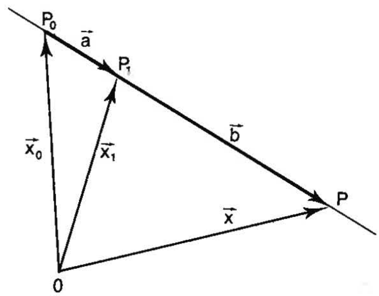


Bild 5.3

Man erkennt, daß man jeden solchen Vektor $\vec{x}$ darstellen kann durch einen der beiden Ortsvektoren und durch einen Vektor, der in Richtung der Geraden liegt, also z.B. durch den Ortsvektor $\vec{x}_0$ und den Vektor $\vec{b}$ zum Pfeil $\overrightarrow{P_0P}$:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{b}.$$

Den Vektor $\vec{b}$ kann man erfassen mit Hilfe des Vektors $\vec{a}$ zum Pfeil $\overrightarrow{P_0P_1}$, also des Vektors

$$\vec{a} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0.$$

Da dieser Vektor in Richtung der Geraden liegt, nennt man ihn einen **„Richtungsvektor"** der Geraden. (Beachte, daß $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist wegen $\vec{x}_0 \neq \vec{x}_1$!). Zur Unterscheidung wird der Vektor $\vec{x}_0$ gelegentlich als **„Stützvektor"** der Geraden bezeichnet. Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, gibt es eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{b} = t\vec{a}.$$

Somit gilt für den Ortsvektor $\vec{x}$ zum Pfeil $\overrightarrow{OP}$:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \quad (\text{mit } t \in \mathbb{R}).$$

Umgekehrt gehört zu jeder Zahl $t \in \mathbb{R}$ ein Ortsvektor $\vec{x}$, dessen zugeordneter Punkt P auf der Geraden g liegt. Man nennt jede Gleichung der Form

$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}}$	$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_0 + t(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)}$
„Punkt-Richtungs-Gleichung"	**„Zweipunktegleichung"**

der betreffenden Geraden.

Bemerkungen:

1) Die Hilfsvariable t nennt man den **„Parameter“** der Gleichung. Man spricht daher auch von der **„Parameterdarstellung“** einer Geraden oder von einer Geradengleichung in **„Parameterform“**.

2) Eine Gleichung der Form $\vec{x}=\vec{x}_0+t(\vec{x}_1-\vec{x}_0)$ bringt zum Ausdruck, daß jeder Punkt P zu einem Ortsvektor $\vec{x}$, der diese Gleichung erfüllt, auf der Geraden g liegt, die durch die Punkte P_0 und P_1 (zu $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$) festgelegt ist. Sie bringt also die **Inzidenz** zwischen den Punkten P und der Geraden g zum Ausdruck.

3) Man nennt den zum Ortsvektor $\vec{x}$ gehörenden Punkt P gelegentlich den „laufenden Punkt“ der Geraden. Wenn t alle reellen Zahlen „durchläuft“, dann „durchläuft“ P alle Punkte der Geraden. Wir fassen zusammen:

S5.1 **Ist eine Gerade g durch zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 mit den Ortsvektoren $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ der Punkte von g:**

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a} \quad \text{mit} \quad \vec{a}=\vec{x}_1-\vec{x}_0 \quad \text{und} \quad t\in\mathbb{R}.$$

5. Wir behandeln je ein **ebenes** und ein **räumliches Beispiel**.

1) Gegeben seien die Punkte P_0 und P_1 durch ihre Ortsvektoren $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Dann ist $\vec{a}=\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Eine Gleichung der Geraden g durch P_0 und P_1 lautet also: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ (Bild 5.4).

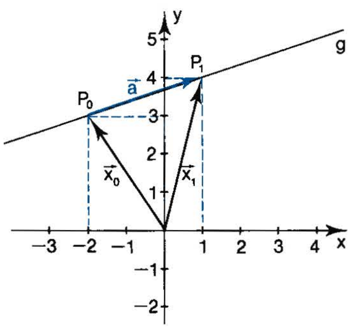


Bild 5.4

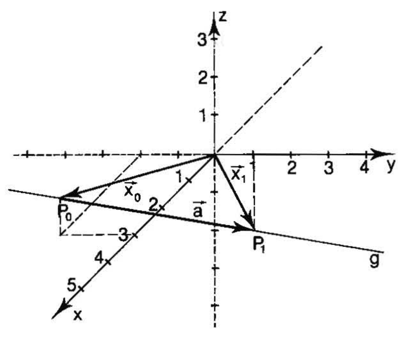


Bild 5.5

2) Gegeben seien die Punkte P_0 und P_1 durch $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Dann ist $\vec{a}=\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}$.

Eine Gleichung der Geraden g durch P_0 und P_1 lautet also: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}$ (Bild 5.5).

6. Wenn man die Lage einer Geraden im Raum R_3 beschreiben oder durch eine Zeichnung verdeutlichen will, ist es zweckmäßig, die Schnittpunkte der Geraden mit den drei Koordinatenebenen zu bestimmen. Man spricht auch von den „**Durchstoßpunkten**" der Geraden durch die drei Ebenen.

Beispiel: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$

1) Alle Punkte der x-y-Ebene (der Grundrißebene) genügen der Bedingung $z=0$. Für einen Punkt der Geraden, der in dieser Ebene liegt, muß also gelten:

$$-1+t(-1)=0, \quad \text{also } t=-1.$$

Daraus ergibt sich:

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

2) Entsprechend gilt für die Punkte der y-z-Ebene (der Aufrißebene): $x=0$. Daraus ergibt sich:

$$3+t=0 \Leftrightarrow t=-3,$$

also

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

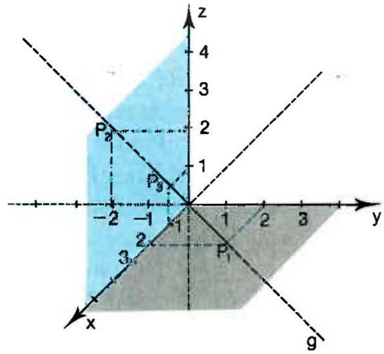


Bild 5.6

3) Schließlich gilt für die Punkte der x-z-Ebene (der Seitenrißebene): $y=0$. Daraus ergibt sich:

$$4+2t=0 \Leftrightarrow t=-2, \quad \text{also } \vec{x}_3=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

In Bild 5.6 sind die Punkte P_1, P_2 und P_3 und die zugehörige Gerade eingetragen.

Beachte: Eine Gerade kann auch parallel zu einer Koordinatenebene verlaufen oder ganz in einer solchen Ebene liegen. Dann existiert natürlich kein Durchstoßpunkt mit dieser Ebene (Aufgabe 8).

7. Durch eine Gleichung in Parameterform ist, wenn $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ (bzw. $\vec{x}_0$ und $\vec{a}$) gegeben sind, **eindeutig** eine bestimmte Gerade g festgelegt. Umgekehrt gehört zu einer Geraden g aber **keineswegs nur eine vektorielle Parameterdarstellung;** denn schon die Punkte P_0 und P_1 können zwei beliebige Punkte der Geraden sein. Außerdem ist auch der Richtungsvektor nicht eindeutig bestimmt; denn mit $\vec{a}$ ist für jede Zahl k (mit $k \neq 0$) auch jeder Vektor $\vec{b}=k\vec{a}$ Richtungsvektor der Geraden.
Parametergleichungen für die durch P_0 und P_1 festgelegte Gerade sind also, wenn $\vec{a}=\vec{x}_1-\vec{x}_0$ ist, z.B. auch:

$$\vec{x}=\vec{x}_1+t\vec{a}; \quad \vec{x}=\vec{x}_0+t(-\vec{a}); \quad \vec{x}=\vec{x}_1+t(\tfrac{5}{7}\vec{a}), \quad \text{usw.}$$

So gilt etwa für den Richtungsvektor $\vec{a}$ des **Beispiels 2)** von Seite 70:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Deshalb ist $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ebenfalls ein Richtungsvektor der Geraden g. Außerdem können wir auch $\vec{x}_1$ als Stützvektor wählen. Eine andere Gleichung für diese Gerade ist also z.B.:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

8. Durch den Parameter wird der Geraden eine **Bezifferung** aufgeprägt; die Gerade wird dadurch zu einer **Zahlengeraden:** Zu jedem Punkt $P \in g$ gehört genau eine Zahl $t \in \mathbb{R}$. In Bild 5.7 ist an einige Punkte die zugehörige Zahl herangeschrieben. Insbesondere gehören zu P_0 und P_1 die Parameterwerte $t_0=0$ und $t_1=1$. Geht man – wie unter 7. beschrieben – zu einer anderen Parametergleichung derselben Geraden über, so ändert sich dabei natürlich auch die Bezifferung der Geraden.

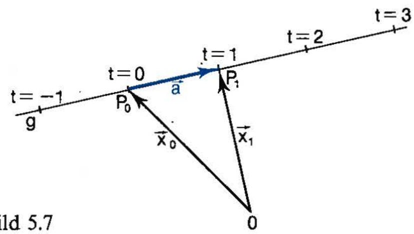


Bild 5.7

9. Wenn eine Gerade in der x-y-Ebene (man sagt auch: im Raum R_2) in Parameterform gegeben ist, dann kann man den Parameter t aus den beiden Koordinatengleichungen eliminieren:

Beispiel: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

Es gilt also:
$$\begin{aligned} & x=2-2t \;|\cdot 3\\ \wedge\; & y=1+3t \;|\cdot 2\\ \hline \Rightarrow\; & 3x+2y=8\end{aligned}$$

Dies ist eine Geradengleichung in allgemeiner Form, wie wir sie seit langem kennen. Durch Umformung auf die Normalform erhält man:

$$y=-\tfrac{3}{2}x+4 \quad \text{(Bild 5.8)}.$$

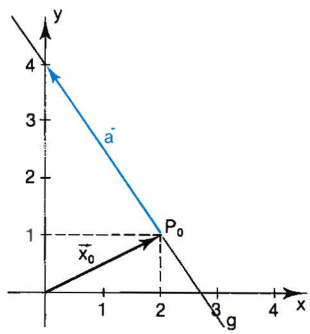


Bild 5.8

Die Gerade dieses Beispiels hat also die Steigung $-\frac{3}{2}$ und mit der y-Achse den Abschnitt 4. **Beachte,** daß bei Geraden im R_3 eine solche Umformung nicht möglich ist!

10. Umgekehrt kann man aus einer Geradengleichung in allgemeiner Form auch eine Gleichung für die betreffende Gerade in Parameterform dadurch herleiten, daß man zwei Punkte P_0 und P_1 mit ihren Ortsvektoren $\vec{x}_0$ und $\vec{x}_1$ ermittelt.

Noch schneller kommt man zum Ziel, wenn man eine der beiden Variablen als Parameter wählt.
Wir zeigen dies am gleichen

Beispiel: $3x+2y=8$.

Wir setzen z.B. $x=s$ und erhalten $y=4-\frac{3}{2}s$. Durch Zusammenfassung der beiden Gleichungen erhält man die Vektorgleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\frac{s}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\quad\left(\text{mit } r=\frac{s}{2}\right).$$

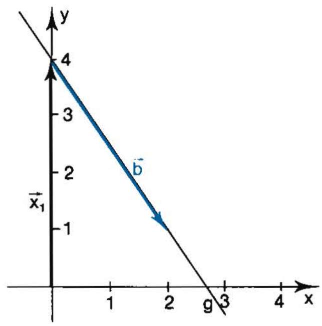


Bild 5.9

Bild 5.9 zeigt, daß es sich um dieselbe Gerade wie oben handelt. Dies läßt sich selbstverständlich auch rechnerisch nachweisen (Aufgabe 24).

11. Wenn eine Gerade im Raum R_3 durch eine Parametergleichung gegeben ist, kann man den Parameter aus je zwei der drei Gleichungen eliminieren.

Beispiel: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, also $\begin{array}{rl|l|l|l} x= & 2+t & \cdot 1 & \cdot 2 & \\ y= & -1+t & \cdot(-1) & & \cdot 2 \\ z= & 3-2t & & \cdot 1 & \cdot 1 \end{array}$

Mit Hilfe der angegebenen Faktoren erhält man die drei Gleichungen

$$x-y=3;\quad 2x+z=7 \quad\text{und}\quad 2y+z=1.$$

Es handelt sich jeweils um die Gleichung einer Geraden in einer der drei Koordinatenebenen. Wir können hier nur mitteilen, daß es sich dabei um die Geraden handelt, die bei senkrechter Projektion der Raumgeraden in die jeweilige Koordinatenebene entstehen. Wir kommen auf dieses Problem in §11, I (Seite 199) zurück.

Übungen und Aufgaben

1. a) Ermittle zeichnerisch den Mittelpunkt M der Strecke P_1P_2 zu den Punkten $P_1(5|6)$ und $P_2(-2|3)$ und den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_M$!
b) Zeige allgemein, daß für den Ortsvektor $\vec{x}_M$ zum Mittelpunkt einer Strecke P_1P_2 gilt: $\vec{x}_M=\frac{1}{2}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$!

2. Ermittle die Ortsvektoren der Seitenmittelpunkte des Dreiecks $P_1P_2P_3$! Bestätige das Ergebnis bei a) und b) durch eine Zeichnung!
a) $P_1(4|-2)$; $P_2(2|6)$; $P_3(-2|4)$ **b)** $P_1(-3|5)$; $P_2(5|-1)$; $P_3(3|5)$
c) $P_1(-2|4|6)$; $P_2(6|-2|-4)$; $P_3(2|6|4)$ **d)** $P_1(8|-4|5)$; $P_2(-4|6|1)$; $P_3(0|2|-3)$

3. Ein Parallelflach sei bestimmt durch den Eckpunkt A(0|0|0) und die benachbarten Eckpunkte B(6|−1|2), D(−2|5|4) und E(2|−3|6). Ermittle die Ortsvektoren aller weiteren Eckpunkte, diejenigen der sechs Schnittpunkte der Flächendiagonalen und den des Schnittpunktes der Raumdiagonalen!

4. a) Drei Ortsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ bestimmen ein Dreieck $P_1 P_2 P_3$. Zeige, daß für den Ortsvektor $\vec{x}_S$ des Schwerpunktes S dieses Dreiecks gilt:

$$\vec{x}_S = \tfrac{1}{3}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3) \qquad \text{(Bild 5.10)!}$$

b) Bestimme den Schwerpunkt für das Dreieck zu

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}!$$

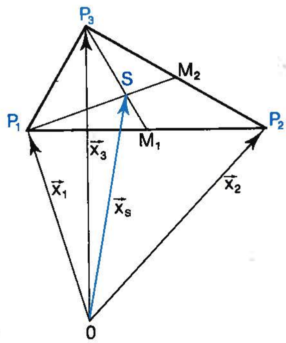


Bild 5.10

5. Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks ABC!
a) A(6|0|0), B(4|2|6), C(8|−8|9) **b)** A(−1|0|1), B(−3|−4|2), C(4|−5|−6)

6. Bestimme eine Parametergleichung für die Gerade durch die Punkte P_0 und P_1! Leite daraus auch die Gleichung der Geraden in Normalform her! Bestätige das Ergebnis durch eine Zeichnung!
a) $P_0(-1|2)$, $P_1(1|-2)$ **b)** $P_0(1|-2)$, $P_1(3|4)$ **c)** $P_0(-4|6)$, $P_1(1|1)$
d) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f)** $P_0(-4|0)$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

7. Ermittle eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte P_0 und P_1 in Parameterform! Prüfe, ob die Punkte P_2 und P_3 auf g liegen!
Ermittle die Durchstoßpunkte der Geraden mit den Koordinatenebenen!
a) $P_0(4|-1|3)$, $P_1(7|1|-2)$, $P_2(1|-3|8)$, $P_3(7|2|-2)$
b) $P_0(-2|0|1)$, $P_1(-2|-2|3)$, $P_2(-2|-4|3)$, $P_3(-2|-6|6)$

8. Ermittle eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte P_0 und P_1 in Parameterform! Bestimme die Durchstoßpunkte der Geraden mit den drei Koordinatenebenen! Welche besondere Lage hat die Gerade?
a) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

9. Ermittle eine Parametergleichung für die Gerade
a) g_1, die parallel zu der durch die Punkte P(7|−1|2) und Q(1|0|−2) bestimmten Geraden g_2 verläuft und durch den Punkt P(−1|1|−2) geht;
b) g_3, die durch den Nullpunkt geht und zur Geraden g_4 zu $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ parallel verläuft;
c) g_5, die parallel zur Geraden g_2 ist und durch den Punkt T von g_4 geht, der durch t = −2 bestimmt ist!

10. Beschreibe jeweils die besondere Lage der gegebenen Geraden aus der Parametergleichung und bestätige deine Aussage durch eine Zeichnung!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=t\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

11. Beschreibe die besondere Lage der gegebenen Geraden!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ **g)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ **h)** $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

12. Ermittle für die Gerade durch die Punkte $A(-1|2|3)$ und $B(3|-4|2)$ zwei verschiedene Stütz- und zwei verschiedene Richtungsvektoren! Stelle vier verschiedene Parametergleichungen für diese Gerade auf!

13. Bestimme die Koordinaten der Punkte **a)** $P(3|y|z)$, **b)** $Q(x|2{,}5|z)$, **c)** $R(x|y|-1)$ so, daß diese Punkte auf der Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ liegen!

14. Zeige, daß die beiden Gleichungen dieselbe Gerade beschreiben!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1{,}5\\-1\end{pmatrix}$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-12\\-8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0{,}5\\-2\\-1{,}5\end{pmatrix}$

15. Ermittle Parametergleichungen für die Geraden, die durch den Punkt $P(-1|5|2{,}5)$ gehen und parallel sind

a) zur x-Achse (y-Achse; z-Achse),

b) zu den beiden Winkelhalbierenden in der x-y-Ebene (x-z-Ebene; y-z-Ebene)!

16. **a)** Begründe, daß durch $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$ mit $t\in[-3;3]$ eine Strecke erfaßt wird!

b) Zeichne die Punktmengen, die durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und durch die folgenden Bedingungen für t gegeben sind!

1) $t\geq 2$ **2)** $-4<t<2$ **3)** $|t|\leq 2$ **4)** $|t|>1$

17. Zwei Geraden g_1 und g_2 sind gegeben durch die Gleichungen

$\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

a) Ermittle den Schnittpunkt S der beiden Geraden rechnerisch und zeichnerisch!

b) Ermittle Parameterbedingungen für die vier von S ausgehenden Halbgeraden!

18. **a)** Zeige, daß die beiden Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ sich in einem Punkt S schneiden. Ermittle S!
b) Ermittle Parameterbedingungen für die vier von S ausgehenden Halbgeraden!

19. Ermittle zu einem Dreieck ABC Parameterbedingungen für die Seiten AB, BC und AC!
a) $A(-2|-3)$, $B(3|-1)$, $C(1|6)$ **b)** $A(2|-2)$, $B(5|6)$, $C(-2|4)$

20. Ermittle Parameterbedingungen für die Teile der Geraden g, die in verschiedenen Quadranten (Oktanten) liegen!
a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

21. Untersuche, welche Punktmengen durch die folgenden Gleichungen mit $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$ beschrieben werden!
a) $\vec{x}=\vec{x}_0+\frac{1}{t}\vec{a}$ **b)** $\vec{x}=\frac{t}{t+1}\vec{a}$ **c)** $\vec{x}=t\vec{a}+t\vec{b}$ **d)** $\vec{x}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

22. Berechne die Mittelpunkte der Strecken AC und BD und zeige dadurch, daß das Viereck ABCD in einer Ebene liegt!
$A(-2|3|-2)$; $B(8|-4|4)$; $C(24|-17|15)$; $D(14|-10|9)$

23. Ermittle zum Viereck ABCD
1) die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD und DA und
2) die Parametergleichungen der Geraden, die durch die Mittelpunkte benachbarter Seiten gehen!
Welche Form hat das von den vier Geraden eingeschlossene Viereck?
a) $A(-4|-2)$; $B(5|-6)$; $C(1|8)$; $D(5|1)$ (Zeichnung!)
b) $A(5|1|-3)$; $B(1|5|7)$; $C(-1|3|1)$; $D(-3|-5|7)$

24. **a)** Zeige rechnerisch, daß durch die Gleichungen $3x+2y=8$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ dieselbe Gerade dargestellt wird!
b) Leite aus der Gleichung $3x+2y=8$ eine weitere Parametergleichung für die betreffende Gerade dadurch her, daß du $y=t$ setzt!

25. **a)** Bestimme eine Parametergleichung für die Gerade g durch die Punkte $P_0(1|-3|2)$ und $P_1(-1|-4|3)$!
b) Bestimme die Durchstoßpunkte der Geraden mit den drei Koordinatenebenen!
c) Eliminiere aus je zwei der drei Koordinatengleichungen den Parameter!
d) Zeige, daß jeder der drei Durchstoßpunkte auf genau einer der drei Geraden liegt, die durch die sich bei c) ergebenden Gleichungen festgelegt sind!
e) Zeige, daß man aus je zwei der sich bei c) ergebenden Geradengleichungen durch Elimination der gemeinsamen Variablen die dritte Gleichung herleiten kann!
f) Wie kann man den Sachverhalt von e) geometrisch deuten?

II. Die Parameterdarstellung von Ebenen

1. Bild 5.11 zeigt eine Situation, wie sie im täglichen Leben nicht selten auftritt: durch Unterlegen eines Stückchens Pappkarton versucht der Hausherr das unangenehme Wackeln eines Tisches zu beheben.
Wie ist es zu erklären, daß vierbeinige Tische häufig wackeln, während dies bei dreibeinigen Tischen nie der Fall ist?
Der Grund hierfür liegt offensichtlich darin, daß schon drei voneinander verschiedene Punkte eine Ebene eindeutig festlegen.

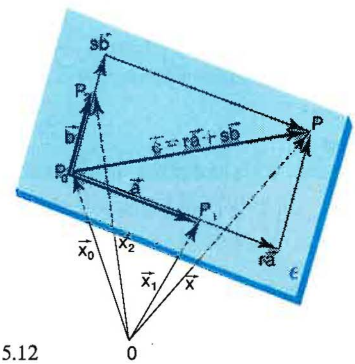
Bild 5.11

Allerdings dürfen diese Punkte nicht auf derselben Geraden liegen.
Falls die Tischbeine schmal genug sind, ihre Enden also wenigstens angenähert als punktförmig angesehen werden können, dann liegen die Enden von drei Tischbeinen auf jeden Fall in einer Ebene; daher kann ein dreibeiniger Tisch nicht wackeln; auch dann nicht, wenn die Tischbeine verschieden lang sind und auch nicht, wenn der Boden nicht eben ist.
Selbst, wenn die Stempel eines vierbeinigen Tisches exakt gearbeitet sind, wenn das Ende des vierten Stempels also mit den drei anderen in derselben Ebene liegt, kann es sein, daß der Tisch wackelt. Erläutere im einzelnen, welche Ursachen das Wackeln eines vierbeinigen Tisches haben kann (Aufgabe 1)!

2. Wenn wir also **Ebenen** in ähnlicher Weise erfassen wollen, wie wir es im I. Abschnitt für Geraden besprochen haben, dann können wir uns eine Ebene ε festgelegt denken durch drei verschiedene Punkte P_0, P_1 und P_2, die allerdings nicht alle auf derselben Geraden liegen dürfen. Man sagt auch: die drei Punkte P_0, P_1 und P_2 dürfen **nicht „kollinear"** sein.
Wir denken uns diese drei Punkte durch ihre Ortsvektoren $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ gegeben.
Man kann in diesem Fall den Ortsvektor $\vec{x}$ zu einem beliebigen Punkt P der fraglichen Ebene darstellen durch einen der Ortsvektoren als **„Stützvektor"** der Ebene und durch einen Vektor, der in der Ebene liegt, also z.B. durch den Ortsvektor $\vec{x}_0$ und den Vektor $\vec{c}$ zum Pfeil $\overrightarrow{P_0P}$:

$$\vec{x}=\vec{x}_0+\vec{c}.$$

Nach den Überlegungen, die wir in §4 angestellt haben, benötigt man zur Festlegung des Vektors $\vec{c}$ zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die die Ebene **„aufspannen"**, zwei linear unabhängige Vektoren also, deren Vertreter parallel zur Ebene (oder in der Ebene) liegen. Zwei solche Vektoren kann man aus den gegebenen Ortsvektoren leicht bestimmen, nämlich z.B.



$\vec{a}=\vec{x}_1-\vec{x}_0$ und $\vec{b}=\vec{x}_2-\vec{x}_0$ (Bild 5.12).

Bild 5.12

Man nennt solche Vektoren gelegentlich **„Spannvektoren"** der Ebene.

Da der Vektor $\vec{c}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **komplanar** ist, gibt es zwei Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ mit $\vec{c} = r\vec{a} + s\vec{b}$. Somit gilt für den Ortsvektor $\vec{x}$ zum Pfeil $\overrightarrow{OP}$:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{x}_0 + r(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) \quad (\text{mit } r, s \in \mathbb{R}).$$

Umgekehrt gehört zu jedem Zahlenpaar $(r|s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Ortsvektor $\vec{x}$, dessen zugeordneter Punkt P in der Ebene ε liegt. Daher nennt man jede Gleichung der Form

$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}}$	$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_0 + r(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_0)}$
„Punkt-Richtungs-Gleichung“	**„Dreipunktegleichung“**

der betreffenden Ebene.

Bemerkungen:

1) Die Hilfsvariablen r und s nennt man **„Parameter“** der Gleichung. Man spricht daher auch von der **„Parameterdarstellung“** einer Ebene oder von einer Ebenengleichung in **„Parameterform“.**

2) Eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + r(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) + s(\vec{x}_2 - \vec{x}_0)$ bringt zum Ausdruck, daß der Punkt P zu einem Ortsvektor $\vec{x}$, der die Gleichung erfüllt, in der Ebene liegt, die durch die Punkte P_0, P_1 und P_2 (zu $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$) festgelegt ist. Sie bringt also die **Inzidenz** zwischen den Punkten P und der Ebene ε zum Ausdruck.

3) Man nennt gelegentlich den zum Ortsvektor $\vec{x}$ gehörenden Punkt P den „laufenden Punkt“ der Ebene. Wenn die Parameter r und s alle reellen Zahlen „durchlaufen“, dann „durchläuft“ P alle Punkte der Ebene.

Wir fassen zusammen:

S 5.2 **Ist eine Ebene ε durch drei nichtkollineare Punkte P_0, P_1 und P_2 mit den Ortsvektoren $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ der Punkte von ε:**

$$\boldsymbol{\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b} \quad \text{mit } \vec{a} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0,\ \vec{b} = \vec{x}_2 - \vec{x}_0 \text{ und } r, s \in \mathbb{R}.}$$

3. Wir behandeln ein **Beispiel:** Gegeben seien die Punkte P_0, P_1 und P_2 durch die Ortsvektoren

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

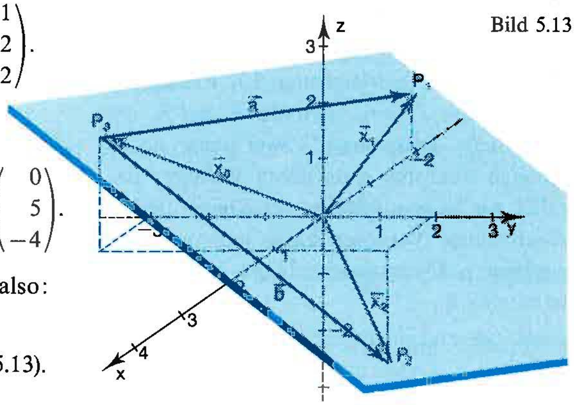


Bild 5.13

Dann ist

$$\vec{a} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \vec{x}_2 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Eine Gleichung für die Ebene ε lautet also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{(Bild 5.13).}$$

4. Durch eine Ebenengleichung in Parameterform ist, wenn $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ (oder $\vec{x}_0$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$) gegeben sind, **eindeutig** eine bestimmte Ebene ε festgelegt.
Umgekehrt gehört zu einer Ebene ε aber keineswegs nur eine vektorielle Parametergleichung; denn schon die Punkte P_0, P_1 und P_2 können weitgehend beliebig aus der Menge aller Punkte der Ebene ausgewählt werden; sie dürfen nur nicht kollinear sein. Außerdem sind auch die Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht eindeutig bestimmt. Jedes Paar linear unabhängiger und zu $\vec{x}_1-\vec{x}_0$ und $\vec{x}_2-\vec{x}_0$ komplanarer Vektoren kann ausgewählt werden, also z.B. auch die Vektoren $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ und $\vec{x}_0-\vec{x}_2$ und zahlreiche weitere Paare.

5. Durch die Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird in der Ebene ε ein Koordinatensystem aufgespannt, welches den Punkt P_0 als Ursprung hat. Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Regel weder gleichlang sind noch aufeinander senkrecht stehen, wird es sich in der Regel **nicht** um ein Kartesisches Koordinatensystem handeln. Jedem Punkt der Ebene wird ein Koordinatenpaar (r|s) zugeordnet. In Bild 5.14 sind die Zahlenpaare an einige Punkte herangeschrieben. Insbesondere gehört zum Punkt P_0 das Zahlenpaar (0|0), zum Punkt P_1 das Zahlenpaar (1|0) und zum Punkt P_2 das Zahlenpaar (0|1).

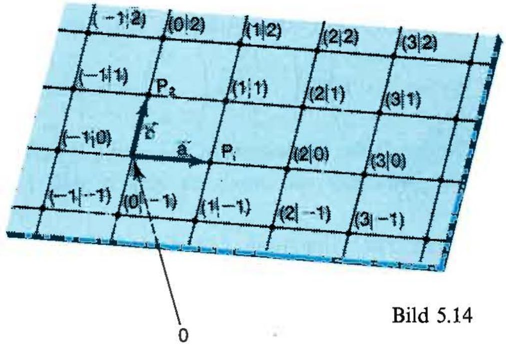


Bild 5.14

6. Ist eine Ebene durch eine Parametergleichung gegeben, so kann man die beiden Parameter aus den drei Koordinatengleichungen eliminieren.

Beispiel: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}.$

$$\left\{\begin{array}{l} x=1+\;r-\;s \\ \wedge\; y=1\quad\;\;+\;s \\ \wedge\; z=2-2r-2s \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 1 \\ \cdot 1 \\ \end{array} \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=2+\;r \\ \wedge\; 2x-z=\;\;4r \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 4 \\ \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow 2x+4y+z=8.$$

Durch diese lineare Gleichung in den drei Variablen x, y und z wird ebenfalls die betreffende Ebene dargestellt. Dies können wir dadurch nachweisen, daß wir aus dieser Gleichung

$$2x+4y+z=8$$

umgekehrt wieder eine Gleichung der Ebene in Parameterform herleiten. Wir setzen z.B. $x=v$ und $y=w$; dann ergibt sich: $z=8-2v-4w$. Wir fassen die drei Gleichungen

$$\begin{array}{rl} & x=\quad v \\ & y=\qquad\quad w \\ \text{und} & z=8-2v-4w \end{array}$$

zu einer Vektorgleichung zusammen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}$ [1].

Da es unzählige Gleichungen in Parameterform für dieselbe Ebene gibt, ist es keineswegs verwunderlich, daß wir bei dieser Rechnung nicht auf die Gleichung gestoßen sind, von der wir oben ausgegangen sind:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \quad [2].$$

Wir können aber leicht nachweisen, daß die beiden Gleichungen [1] und [2] dieselbe Ebene darstellen. Man erkennt sofort, daß der Spannvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ in beiden Gleichungen auftritt. Wegen $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix}$ sind alle drei Spannvektoren komplanar. Dies bedeutet, daß die durch die Gleichungen [1] und [2] erfaßten Ebenen parallel sind.

Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß z.B. der Punkt zum Ortsvektor $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ auch in der Ebene zur Gleichung [1] liegt. Wir weisen dies dadurch nach, daß wir die zugehörigen Parameterwerte v und w berechnen. Aus Gleichung [1] ergibt sich:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\-4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1\\ \wedge\ w=1\\ \wedge\ 2=8-2v-4w\end{cases}$$

Die Zahlen $v=1$ und $w=1$ erfüllen auch die dritte Gleichung: $2=8-2-4$ (w).

Da der Punkt $P_0(1|1|2)$ auch in der Ebene zur Gleichung [1] liegt, sind die beiden Ebenen tatsächlich identisch.

7. Um die durch die Gleichung $2x+4y+z=8$ gegebene Ebene zeichnerisch darstellen zu können, ermitteln wir ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenachsen.

Für die x-Achse gilt: $y=z=0$,
für den Schnittpunkt also $x=4$;

für die y-Achse gilt: $x=z=0$,
für den Schnittpunkt also $y=2$;

für die z-Achse gilt: $x=y=0$,
für den Schnittpunkt also $z=8$.

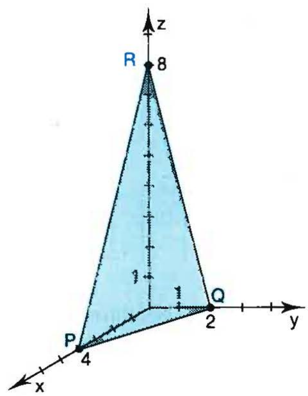


Bild 5.15

Die drei Punkte $P(4|0|0)$, $Q(0|2|0)$ und $R(0|0|8)$ sind in Bild 5.15 eingetragen. Das Dreieck PQR ist der Teil der fraglichen Ebene, der im I. Oktanten liegt.

8. Die Gleichung $2x+4y+z=8$ ist von der Form

$$\mathbf{ax+by+cz=d} \quad (\text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

Man spricht von einer Ebenengleichung in **„allgemeiner Form"**. Sie entspricht der Geradengleichung in allgemeiner Form: $ax+by=c$, die uns seit langem vertraut ist.

Wir werden uns mit Ebenengleichungen in allgemeiner Form in §9 ausführlich beschäftigen.

Übungen und Aufgaben

1. Ein vierbeiniger Tisch wackelt fast immer. Woran liegt das? Erläutere im einzelnen die Gründe dafür, daß ein vierbeiniger Tisch wackelt!

2. Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene durch die Punkte P_0, P_1 und P_2!

a) $P_0(1|1|-2)$; $P_1(3|-2|1)$; $P_2(-1|1|-2)$ **b)** $P_0(0|-1|2)$; $P_1(1|0|-3)$; $P_2(2|-1|-2)$
c) $P_0(3|1|-2)$; $P_1(-1|2|-3)$; $P_2(0|-1|1)$ **d)** $P_0(2|3|-1)$; $P_1(-1|2|1)$; $P_2(-3|-2|4)$

3. Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene ε durch den Punkt P_0, die parallel zur Ebene ε_1 verläuft!

a) $P_0(4|-1|2)$; ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) $P_0(-1|2|-3)$; ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$

4. Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene durch den Punkt $P_0(3|1|-2)$, die parallel zur x-y-Ebene (x-z-Ebene; y-z-Ebene) verläuft!

5. a) Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene ε durch die Punkte $P_1(2|-3|0)$, $P_2(-3|0|2)$ und $P_3(0|2|-4)$!
b) Bestimme eine Parametergleichung für die Ebene ε_1, die durch den Punkt $P_4(3|4|-2)$ geht und parallel zur Ebene ε verläuft!

6. Welches geometrische Gebilde wird bei nichtkollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Parametergleichung beschrieben? Welche Werte von r und s sind auszuschließen?

a) $\vec{x}=\vec{x}_0+\frac{1}{r}\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{b}$ **b)** $\vec{x}=r^2\vec{a}+s^2\vec{b}$ **c)** $\vec{x}=\vec{x}_0+(r-s)\vec{a}+s\vec{b}$

7. Beschreibe die besondere Lage der Ebene!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

8. Ermittle für die Ebenen in Aufgabe 7 Gleichungen in allgemeiner Form!

9. Ermittle für die gegebene Ebene eine parameterfreie Gleichung, also eine Ebenengleichung in allgemeiner Form!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$

10. Ermittle eine Parametergleichung für die betreffende Ebene!
a) $x+y+z=3$ **b)** $x-2y+z=6$ **c)** $-3x+y-z=4$ **d)** $x+z=-5$

11. Ermittle die Durchstoßpunkte der drei Koordinatenachsen mit der Ebene ε und den Punkt P in der Ebene ε!

a) $\varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; $P(1|y|-1)$

b) ε durch $P_0(2|-2|4)$; $P_1(3|-1|5)$; $P_2(1|-2|-2)$; $P(x|-1|11)$

12. Untersuche, ob die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in der Ebene ε liegen!

a) $\varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\3\\-5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$; $P_1(2|8|-2)$; $P_2(-1|1|10)$; $P_3(4|8|-6)$; $P_4(0|2|4)$

b) $\varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; $P_1(1|-6|3)$; $P_2(2|3|1)$; $P_3(3|0|-1)$; $P_4(3|-5|2)$

13. Begründe, warum durch eine Gleichung der Form $\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$ bei nichtkollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch die Bedingung
a) $s\geq 0$ eine Halbebene;
b) $0\leq r\leq 3 \wedge 0\leq s\leq 2$ die Fläche eines Parallelogramms;
c) $0\leq r+s\leq 2 \wedge r, s\geq 0$ die Fläche eines Dreiecks beschrieben wird!

14. Welches geometrische Gebilde wird durch eine Parametergleichung der Form $\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$ mit nichtkollinearen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und durch folgende Zusatzbedingung beschrieben?
a) $r=-2 \wedge s\in\mathbb{R}$ **b)** $r\in\mathbb{R} \wedge s=3$ **c)** $r, s\in\mathbb{Z}$
d) $r\leq 1 \wedge s\in\mathbb{R}$ **e)** $r\in\mathbb{R} \wedge s>-1$ **f)** $-1\leq r\leq 1 \wedge 2\leq s\leq 5$

15. Stelle die durch die folgenden Bedingungen gegebenen Punktmengen zeichnerisch dar!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$; $-3<r<3$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; $1\leq s\leq 5$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$; $2<r<7 \wedge 1<s<5$

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; $0\leq r+s\leq 4 \wedge r, s\geq 0$

16. Ein Quader (Bild 5.16) wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Ermittle Parameterbedingungen für die sechs Seitenflächen des Quaders!

$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$

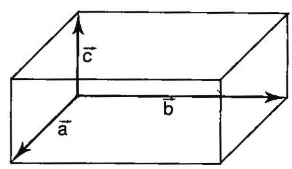


Bild 5.16

III. Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen

1. Aus Gründen der Verkehrssicherheit werden Autobahnen grundsätzlich kreuzungsfrei angelegt. Bild 5.17 zeigt eine Brücke über eine Autobahn; Landstraße und Autobahn liegen an dieser Stelle in verschiedenen Ebenen; einen Kreuzungsbereich gibt es nicht.

Bild 5.17

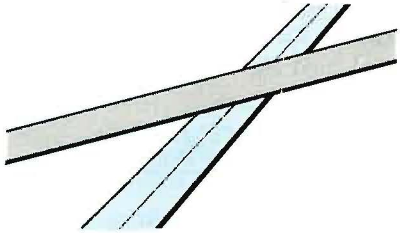


Bild 5.18

Denkt man sich die Linienführungen der Autobahn und der Landstraße von Bild 5.17 durch Geraden dargestellt (Bild 5.18), so erkennt man, daß es im Raum Geraden gibt, die sich nicht schneiden, die aber auch nicht parallel zueinander sind. Solche Geraden nennt man **„windschief"**.

Beachte: Wir sagen von zwei Geraden, daß „sie sich schneiden", wenn sie genau einen Punkt gemeinsam haben.

Der Unterschied zwischen parallelen und windschiefen Geraden liegt darin, daß parallele Geraden stets in derselben Ebene liegen, windschiefe Geraden aber nicht. Wir definieren:

D5.1 1) **Zwei Geraden, die sich nicht schneiden, heißen**
„parallel" | „windschief"
genau dann, wenn es
eine | keine
Ebene gibt, in der beide Geraden liegen.

2) **Jede Gerade ist auch zu sich selbst parallel.**

Beispiel: Bild 5.19 zeigt eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Bei dieser Pyramide sind die Geraden $g_1(A, B)$ und $g_2(C, D)$ zueinander parallel, während $g_1(A, B)$ und $g_3(C, S)$ windschief sind. Suche weitere Beispiele für windschiefe Geraden; betrachte z.B. die Kanten eines Zimmers (Aufgabe 2)!

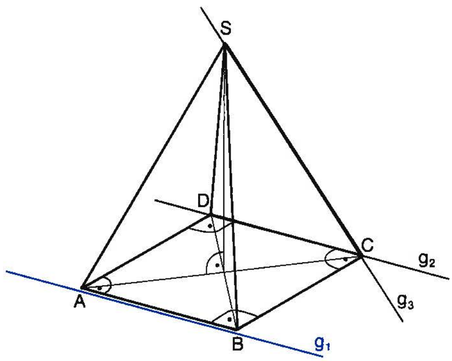


Bild 5.19

2. Wenn wir also zwei Geraden g_1 und g_2 auf ihre gegenseitige Lage zu untersuchen haben, so sind folgende Möglichkeiten zu unterscheiden:

Schnitt, Parallelität, Identität und Windschiefe.

Dabei ist die Identität ein Sonderfall der Parallelität.

Die beiden Geraden seien jeweils durch Parametergleichungen gegeben:

$$g_1\colon\ \vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a} \quad \text{und} \quad g_2\colon\ \vec{x}=\vec{x}_2+s\vec{b}.$$

Dann kann man an Hand der Stützvektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ und der Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entscheiden, welcher Fall vorliegt.
Wenn die Geraden **parallel** (Bild 5.20) oder **identisch** (Bild 5.21) sind, dann haben sie die gleiche Richtung; dies erkennt man daran, daß die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind. Sind die Geraden sogar identisch, so muß auch noch $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sein (Bild 5.21).

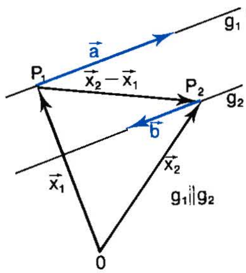


Bild 5.20

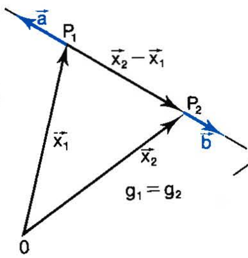


Bild 5.21

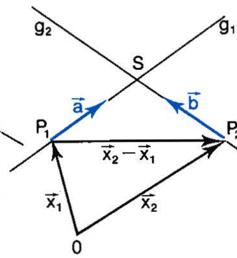


Bild 5.22

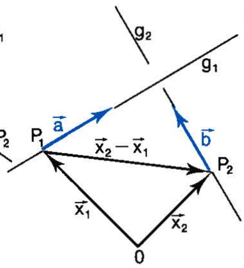
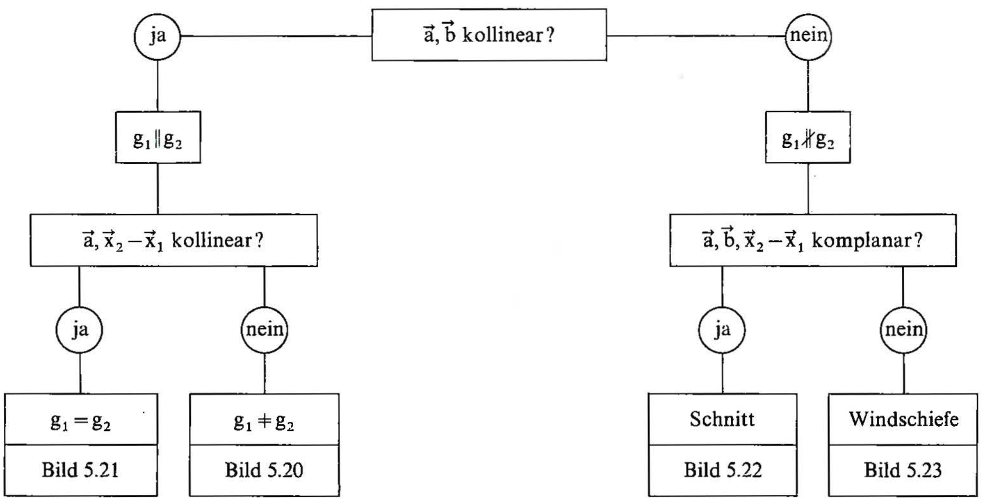


Bild 5.23

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear, so schneiden sich die Geraden oder sind windschief. Im ersten Fall (Bild 5.22) müssen beide Geraden in derselben Ebene liegen, d.h. $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ müssen komplanar sein. Sind $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ dagegen nicht komplanar, dann sind die Geraden g_1 und g_2 windschief (Bild 5.23).
Das folgende Flußdiagramm zeigt, wie man die Untersuchung grundsätzlich durchführen kann.



Bemerkung: Wenn $g_1 \nparallel g_2$ ist, kann man Rechenarbeit einsparen dadurch, daß man sofort versucht, einen etwaigen Schnittpunkt zu berechnen. Wir verweisen auf die folgenden Beispiele 3) und 4).

3. Wir behandeln für jeden der möglichen Fälle ein **Beispiel.**

1) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix}$

Es gilt: $\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; also sind g_1 und g_2 parallel.

Ferner ist: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$; dieser Vektor ist nicht kollinear zu $\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$; also sind die beiden Geraden **parallel, aber nicht identisch.**

Bemerkung: Man könnte z.B. auch prüfen, ob $\vec{x}_1$ die Gleichung für g_2 erfüllt.

2) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix}$

Es gilt: $\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; also sind g_1 und g_2 parallel.

Ferner ist: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$;

der Vektor $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ ist also kollinear zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; daher sind die beiden Geraden **identisch.**

3) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix}$

Man erkennt sofort, daß die beiden Richtungsvektoren **nicht kollinear** sind; die beiden Geraden schneiden sich also in genau einem Punkt S oder sind zueinander windschief.
Nach obigem Flußdiagramm hätten wir nun zu prüfen, ob die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ komplanar sind oder nicht. Um Rechenaufwand einzusparen, versuchen wir statt dessen sofort, einen etwaigen Schnittpunkt zu berechnen. Gibt es einen Schnittpunkt S, so muß der zugehörige Ortsvektor $\vec{x}_S$ beide Gleichungen erfüllen, d.h. es muß Werte der Parameter r und s geben mit:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix},$$

ausführlich geschrieben:

$$\left\{\begin{array}{l} 1+2r=-1+2s\\ \wedge\ -2+r=-2+2s\\ \wedge\ 1-3r=2-5s\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2r-2s=-2\\ \wedge\ r-2s=0\\ \wedge\ -3r+5s=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r-s=-1\\ \wedge\ r=2s\\ \wedge\ -3r+5s=1\end{array}\right\}.$$

Setzt man $r=2s$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $s=-1$ und somit $r=-2$. Diese Zahlen erfüllen auch die dritte Gleichung $(-3)\cdot(-2)+5\cdot(-1)=6-5=1$. Das Gleichungssystem ist also **eindeutig** lösbar.
Durch Einsetzen von $r=-2$ in die Gleichung von g_1 erhält man:

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4\\-2-2\\1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-4\\7\end{pmatrix}.$$

Man kann dieses Ergebnis durch Einsetzen von $s=-1$ in die Gleichung von g_2 bestätigen. Die Geraden schneiden sich also im Punkt $S(-3|-4|7)$.

4) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Man erkennt wiederum sofort, daß die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ **nicht kollinear** sind. Die Parameterwerte r und s eines etwaigen Schnittpunktes S müssen also der folgenden Gleichung genügen:

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},\quad \text{ausführlich geschrieben:}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 2 &= 1-s\\ \wedge\ -1-2r &= s\\ \wedge\ 3+r &= -2+2s\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} s &= -1\\ \wedge\ -2r-s &= 1\\ \wedge\ r-2s &= -5\end{array}\right\}.$$

Mit $s=-1$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung $r=0$, aus der dritten Gleichung aber $r=-7$. Das Gleichungssystem ist also unerfüllbar. Daher gibt es keinen Schnittpunkt der beiden Geraden; es handelt sich um **windschiefe** Geraden.

4. Sind eine Ebene ε und eine Gerade g durch ihre Parameterdarstellungen

$$\vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a}+s\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}=\vec{x}_2+t\vec{c}$$

gegeben, so kann man ihre gegenseitige Lage ebenfalls an Hand der Stützvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, der Spannvektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und des Richtungsvektors $\vec{c}$ untersuchen.

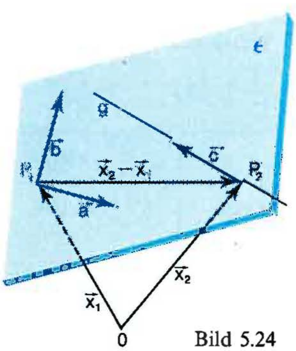


Bild 5.24

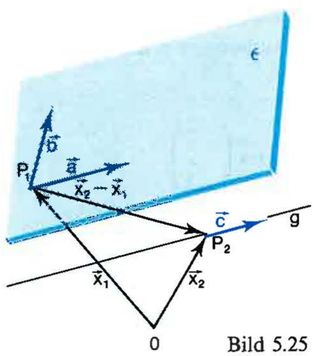


Bild 5.25

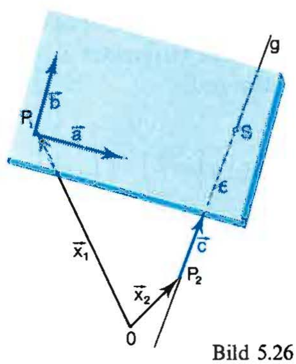


Bild 5.26

1) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **komplanar,** so bedeutet dies, daß die Gerade **parallel** zur Ebene verläuft.

a) Ist außerdem $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ **komplanar** mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, so liegt die Gerade in der Ebene: $g \subset \varepsilon$ (Bild 5.24).

b) Ist $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ **nicht komplanar** mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, so liegt die Gerade g außerhalb der Ebene ε (Bild 5.25); die Gerade ist zur Ebene parallel.

2) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ **nicht komplanar,** so schneiden sich die Gerade und die Ebene in genau einem Punkt S (Bild 5.26).

5. Bei der konkreten Durchführung der Untersuchung geht man zweckmäßigerweise so vor, wie wir es bei Geraden mit nicht-parallelen Richtungsvektoren getan haben: man versucht, die Punkte zu bestimmen, die sowohl in der Ebene wie auf der Geraden liegen. Deren Ortsvektoren müssen beiden Gleichungen genügen. Wir suchen also Parameterwerte r, s und t mit

$$\vec{x}_1+r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{x}_2+t\vec{c}.$$

Beispiel: Ebene und Gerade seien gegeben durch:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten gemeinsamer Punkte von Ebene und Gerade müssen dem folgenden Gleichungssystem genügen. Wir bestimmen die Lösungen durch Äquivalenzumformungen mit Hilfe der angegebenen Faktoren.

$$\left\{\begin{array}{l} 2+r-2s=1-t \\ \wedge\ 1-2r+s=-4t \\ \wedge\ -3+r+2s=7t \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} & r-2s+t=-1 \\ \wedge & -2r+s+4t=-1 \\ \wedge & r+2s-7t=3 \end{array}\right. \begin{array}{|l|l} \cdot 2 & \cdot(-1) \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} & r-2s+t=-1 \\ \wedge & -3s+6t=-3 \\ \wedge & 4s-8t=4 \end{array}\right. \begin{array}{|l} \\ \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} & r-2s+t=-1 \\ \wedge & -s+2t=-1 \\ \wedge & 0=0 \end{array}\right\}.$$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $s=1+2t$ und damit aus der ersten Gleichung

$$r=-1+2s-t=-1+2(1+2t)-t=-1+2+4t-t=1+3t.$$

Durch Einsetzen dieser Bedingungen in die Ebenengleichung erhält man:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+(1+3t)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+(1+2t)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1+3t-2-4t\\1-2-6t+1+2t\\-3+1+3t+2+4t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich also die oben angegebene Geradengleichung. Dies bedeutet, daß die Gerade g vollständig in der Ebene ε liegt (Fall 1a).

Hat das betreffende Gleichungssystem **keine Lösung,** so liegt g außerhalb der Ebene und ist zu ihr parallel (Fall 1b), hat es **genau eine Lösung,** so schneiden sich Ebene und Gerade in genau einem Punkt S (Fall 2c).

Wir kommen auf diese Fälle in § 7, IV nach der Behandlung von linearen Gleichungssystemen zurück.

6. Sind schließlich zwei Ebenen ε_1 und ε_2 durch ihre Parameterdarstellungen

$$\vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a}_1+s\vec{b}_1 \quad \text{und} \quad \vec{x}=\vec{x}_2+t\vec{a}_2+v\vec{b}_2$$

gegeben, so kann man deren gegenseitige Lage ebenfalls an Hand der Stützvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ und der Spannvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ untersuchen.
Hier können die folgenden Fälle auftreten:

1) Sind $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ komplanar, so bedeutet dies, daß die beiden Ebenen **parallel** zueinander sind.
a) Ist außerdem noch $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ mit den vier Spannvektoren **komplanar,** so sind die beiden Ebenen **identisch** (Bild 5.27).
b) Ist $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ **nicht komplanar** mit den vier Spannvektoren, so sind ε_1 und ε_2 zwei verschiedene, zueinander parallele Ebenen (Bild 5.28).

2) Sind $\vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{b}_2$ **nicht** komplanar, so schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden (Bild 5.29).

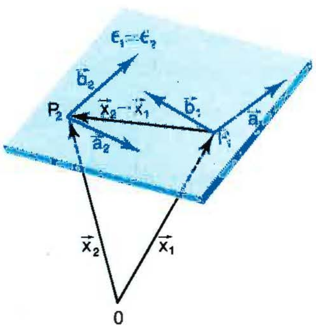


Bild 5.27

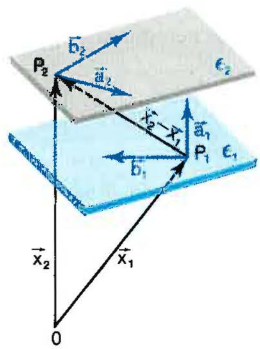


Bild 5.28

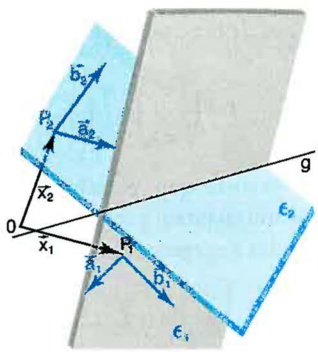


Bild 5.29

Bei der konkreten Durchführung der Untersuchung geht man zweckmäßigerweise wiederum so vor, daß man versucht, die Punkte zu bestimmen, die den beiden Ebenen gemeinsam sind, die also der Gleichung

$$\vec{x}_1+r\vec{a}_1+s\vec{b}_1=\vec{x}_2+t\vec{a}_2+v\vec{b}_2$$

genügen. Wir kommen darauf in §7, IV zurück und behandeln hier nur ein **Beispiel,** bei dem der Rechenaufwand wegen der gewählten Zahlen relativ gering ist.

$$\textbf{Beispiel:}\ \varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad \varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Gemeinsame Punkte der beiden Ebenen müssen dem folgenden Gleichungssystem genügen:

$$\left\{\begin{array}{llll} & -1+3r & = & 2+t \\ \wedge & 2\quad +s & = & -2t-v \\ \wedge & 1-r & = & -1 \end{array}\right.$$

Aus der dritten Gleichung ergibt sich: $r=2$; aus der ersten Gleichung folgt dann: $t=3$ und aus der zweiten Gleichung: $s=-8-v$.

Wir setzen die Ergebnisse in die Gleichungen für ε_1 und für ε_2 ein:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}+(-8-v)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+6+0\\2+0-8\\1-2+0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix};$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3\\0-6\\-1+0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-6\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Wir erhalten in den beiden Fällen dieselbe Geradengleichung. Die beiden Ebenen schneiden sich also in der durch diese Gleichung dargestellten Geraden.
Beachte: In analogen Fällen erhält man nicht immer dieselbe Gleichung; wohl aber müssen die beiden Gleichungen dieselbe Gerade darstellen.

7. Bevor wir weitere Beispiele behandeln, erscheint es zweckmäßig, daß wir uns zunächst mit linearen Gleichungssystemen näher befassen.

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2!

a) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

c) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\2{,}5\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}9\\-7{,}5\end{pmatrix}$

2. a) Betrachte die Geraden, auf denen die Kanten deines Zimmers oder die Kanten in deinem Unterrichtsraum liegen!
Suche unter ihnen Paare von zueinander windschiefen Geraden!
b) Verfahre wie in Aufgabenteil **a)** mit den Kanten eines Prismas (Bild 1.15), einer Pyramide (Bild 1.16), eines Tetraeders (Bild 1.17) und eines Parallelflachs (Bild 1.18)!

3. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2!

a) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

c) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

d) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-5\\3\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-13\\7\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\10\\-6\end{pmatrix}$

e) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1{,}5\\-2\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\-3\end{pmatrix}$

f) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$, $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$

4. Untersuche, ob eine Seite des Dreiecks ABC auf der Geraden g liegt oder parallel zu ihr ist!
A(3|3|6); B(5|0|2); C(1|4|6); g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

5. Die Geraden g_1, g_2 und g_3 bestimmen ein Dreieck ABC. Ermittle Parameterbedingungen für die Seiten AB, BC und AC!
g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix}$

6. Gegeben sind die Punkte A(2|3|5); B(0|5|10); C(3|4|6); D(5|0|2).
a) Zeige mit Hilfe der Vektoren zu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$, daß das Viereck ABCD nicht in einer Ebene liegt!
b) Zeige dies auch mit Hilfe der Geraden $g_1(A, C)$ und $g_2(B, D)$!
c) Zeige, daß die Geraden durch die Mittelpunkte benachbarter Seiten des Vierecks paarweise zueinander parallel sind!
d) Untersuche, ob die Aussage von c) für jedes nichtebene Viereck ABCD gilt!

7. In welchen Punkten durchstößt die Gerade zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-6\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ die drei Koordinatenebenen und die Ebene zu $z=7$?

8. Untersuche die gegenseitige Lage zwischen der Ebene ε und der Geraden g! Bestimme gegebenenfalls das Schnittgebilde!
ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **a)** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

9. Untersuche die gegenseitige Lage zwischen der Ebene ε und der Geraden g! Bestimme gegebenenfalls das Schnittgebilde!

a) ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

c) ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

d) ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

e) ε: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$ g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-4\\7\end{pmatrix}$

10. Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen ε_1 und ε_2!

a) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon_2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon_2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

c) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon_2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

d) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon_2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\3\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

11. Ermittle die Schnittgeraden der Ebene zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ mit den drei Koordinatenebenen!

IV. Übergreifende Aufgaben

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}t\\0\\t\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}t\\t\\-t\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-t\\t^2\\t\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}^{+0}$.

a) Untersuche, für welche Werte t die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind!

b) Bestimme t so, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind! Untersuche, ob sich dann jeder der drei Vektoren durch die beiden anderen linear erzeugen läßt!

c) Berechne $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für $t=1$ und zeige, wie sich aus ihnen der Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ linear erzeugen läßt!

d) Berechne $\vec{a}$ für $t=2$, $\vec{b}$ für $t=-3$ und $\vec{c}$ für $t=-1$ und zeige, wie sich aus diesen Vektoren $\vec{f}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\13\end{pmatrix}$ linear erzeugen läßt!

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\k^2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-k\\k\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}^{+0}$.

a) Zeige, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für $k=1$ linear unabhängig sind!

b) Ermittle die Werte von k, für die $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind! Für welche $k\in\mathbb{R}^{+0}$ sind sie linear unabhängig?

c) Zeige, wie sich die Vektoren $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}+\vec{f}$ und $\vec{d}-\vec{f}$ aus den für $k=-1$ gebildeten Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear erzeugen lassen: $\vec{d}=\begin{pmatrix}-1\\7\\1\end{pmatrix}$, $\vec{f}=\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$!

3. a) Von zwei Eckpunkten eines Dreiecks ABC seien Transversalen zu den gegenüberliegenden Dreiecksseiten gezogen; sie teilen sich gegenseitig im Verhältnis 3 : 1. In welchem Verhältnis teilt jede der Transversalen jeweils die gegenüberliegende Seite?

b) Löse die Aufgabe a) allgemein für die Teilungsverhältnisse $1:n$ ($n \in \mathbb{N}$) und $m:n$ ($m, n \in \mathbb{N}$)!

4. Im Parallelogramm ABCD teile der Punkt E die Seite CD im Verhältnis 2 : 1, der Punkt F die Seite AB im Verhältnis 2 : 3. Untersuche

a) wie sich die Transversalen BE und CF teilen,

b) wie sich die Transversalen AE und DF teilen,

c) wie die Transversale AE die Diagonale BD teilt,

d) wie sich die Diagonale AC und die Transversale EF teilen!

5. Die Eckpunkte eines Sechsecks seien $P_1(4|3|-4)$, $P_2(3|-7|7)$, $P_3(-2|3|-3)$, $P_4(-3|-4|4)$, $P_5(0|-1|-4)$, $P_6(-4|7|-5)$.

a) Weise nach, daß eine Kette aus den Vektoren zu $\overrightarrow{P_1P_3}$, $\overrightarrow{P_2P_4}$, $\overrightarrow{P_3P_5}$, $\overrightarrow{P_4P_6}$, $\overrightarrow{P_5P_1}$ und $\overrightarrow{P_6P_2}$ ebenfalls ein Sechseck bildet!

b) Gilt dies für beliebige gewählte Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und P_6 im R_3?

c) Gilt dieser Sachverhalt sogar für jedes n-Eck im R_3 ($n \in \mathbb{N}$); für welche n-Ecke gilt der Sachverhalt ggf. nicht?

6. Für die Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ eines Trapezes ABCD (Bild 5.30) gelte: $\vec{c} = -k\vec{a}$ (mit $k > 0$). Der Diagonalenschnittpunkt sei S.

a) Drücke $\vec{d}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus!

b) Drücke den Vektor $\vec{s}$ zu $\overrightarrow{AS}$ durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus!

c) In welchem Verhältnis teilt S die Diagonalen AC und BD?

d) Was gilt im Sonderfall $k = 1$?

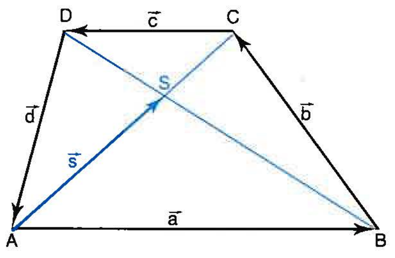


Bild 5.30

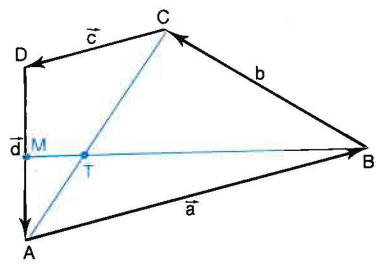


Bild 5.31

7. Für die Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ eines Trapezes ABCD gelte $\vec{c} = -k\vec{a}$ (mit $k > 0$). M sei der Mittelpunkt der Seite AD (Bild 5.31); die Diagonale AC schneide die Transversale BM im Punkte T.

a) In welchem Verhältnis teilt T die Diagonale AC?

b) In welchem Verhältnis teilt T die Transversale BM?

c) In welchen Verhältnissen teilen sich entsprechend die Diagonale BD und die Transversale CM?

d) Was gilt in den Sonderfällen $k = 0$ und $k = 1$?

8. **a)** Bestimme eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt $P_1(4|0|2)$ parallel zur Geraden g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ in Parameterform!

b) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε, in der g_1 und der Punkt $P_2(7|1|-1)$ liegen, in Parameterform!

c) Liegt der Punkt $P_3(0|2|3)$ in der Ebene ε? Ermittle ggf. die Parameterwerte dieses Punktes!

9. **a)** Ermittle eine Parametergleichung der Ebene ε durch die drei Punkte $A(6|6|0)$, $B(0|10|0)$, $C(0|0|6)$!

b) Liegt der Punkt $D(8|0|4)$ in der Ebene ε?

c) Untersuche die gegenseitige Lage von ε und der Geraden g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$!

d) Ermittle eine Parametergleichung für die Schnittgerade der Ebene ε mit der Ebene durch die Punkte A, B und D!

10. **a)** Zeige, daß die vier Punkte $A(1|5|8)$, $B(9|1|4)$, $C(5|7|2)$ und $D(-3|11|6)$ in einer Ebene ε_1 liegen!

b) Ermittle eine Parametergleichung der Ebene ε_1!

c) Ermittle den Schnittpunkt der Geraden g durch B und D mit der y-z-Ebene!

d) Ermittle das Schnittgebilde zwischen ε_1 und der x-y-Ebene!

e) Untersuche die gegenseitige Lage von ε_1 und ε_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\-3\\8\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$!

11. Trifft die Gerade g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\8\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ die Fläche des Parallelogramms ABCD, das durch $A(-2|-3|-4)$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\8\end{pmatrix}$, $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}$ bestimmt ist?

12. Welches Stück der Geraden durch die beiden Punkte $P(4|2|0)$ und $Q(8|8|8)$ liegt innerhalb des Tetraeders mit den Eckpunkten $A(5|9|3)$, $B(6|4{,}5|10)$, $C(3|0|4)$ und $D(10|6|5)$?

13. Untersuche, ob die drei Geraden g_1, g_2 und g_3 ein Dreieck einschließen! Berechne ggf. die drei Eckpunkte und die Seitenlängen!

a) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$; g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

b) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-5\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\-1\\6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-7\\-3\\2\end{pmatrix}$; g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

14. Ein Parallelogramm werde von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt (Bild 5.32). M_a und M_b seien Mittelpunkte der Seiten AB und BC.

a) Ermittle Parametergleichungen der Geraden $g_1(A, M_b)$, $g_2(C, M_a)$ und $g_3(B, D)$!

b) Zeige, daß die drei Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt S haben und ermittle die jeweiligen Parameterwerte!

c) Welche Rolle spielt S in dem Dreieck ABC? Lassen sich die Ergebnisse von b) in diesem Zusammenhang begründen?

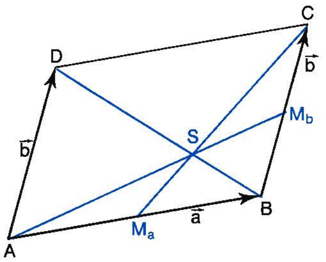


Bild 5.32

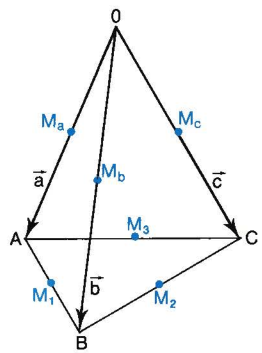


Bild 5.33

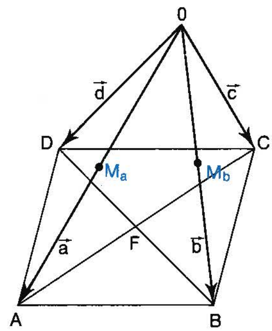


Bild 5.34

15. Ein Tetraeder werde von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt (Bild 5.33). Die Punkte M_a, M_b, M_c seien die Mittelpunkte der Strecken OA, OB, OC; M_1, M_2, M_3 seien die Mittelpunkte der Strecken AB, BC und CA.

a) Ermittle Gleichungen der drei Geraden $g_1(M_a, M_2)$, $g_2(M_b, M_3)$, $g_3(M_c, M_1)$!

b) Zeige, daß die Geraden g_1 und g_2 sich in einem Punkte S schneiden!

c) In welchem Verhältnis teilt S die Strecken M_aM_2 und M_bM_3?

d) Untersuche, ob S auch auf der Geraden g_3 liegt! Zeige, daß für den Vektor $\vec{s}$ zum Pfeil $\overrightarrow{OS}$ gilt: $\vec{s}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$!

16. Eine schiefe Pyramide werde durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aufgespannt (Bild 5.34). Die Grundfläche ABCD sei ein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt F. Die Punkte M_a und M_b seien Mittelpunkte der Strecken OA und OB.

a) Ermittle Gleichungen der Geraden $g_1(M_a, C)$ und $g_2(M_b, D)$ in Parameterform!

b) Zeige, daß sich die Geraden g_1 und g_2 in einem Punkt S schneiden und daß für den Vektor $\vec{s}$ zu $\overrightarrow{OS}$ gilt: $\vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})$!

c) In welchen Verhältnissen teilt S die Strecken M_aC und M_bD?

d) Ermittle eine Gleichung der Geraden $g_3(O, F)$ und untersuche, ob der Punkt S auf der Geraden g_3 liegt!

17. Bearbeite Aufgabe 16 für den Fall, daß für die Grundfläche ABCD gilt: $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$!

§ 6 Lineare Gleichungssysteme (I)

I. Zur Einführung

1. In den bisherigen Paragraphen sind schon mehrfach Systeme linearer Gleichungen aufgetreten.

1) In § 4 haben wir gesehen, daß die Frage, ob n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear abhängig sind, ob also die Gleichung

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

eine nichttriviale Lösung hat, unmittelbar auf ein lineares Gleichungssystem führt. Wir können sogar sagen, daß diese Gleichung lediglich eine Kurzschreibweise für ein lineares Gleichungssystem darstellt.

2) In § 5 führte die Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen gleichfalls auf die Frage, ob gewisse Vektoren linear abhängig sind oder nicht, also ebenfalls auf lineare Gleichungssysteme.

2. Es gibt zahllose weitere Probleme in den verschiedensten Anwendungsgebieten der Mathematik, die nur mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen gelöst werden können. Wir zeigen dies an dem folgenden

Beispiel:

Viele Haushaltsgeräte (Spülbecken, Spülmaschinen, Waschmaschinen usw.) sind aus V2A-Stahl (bekannt unter dem Namen „Nirosta") hergestellt. Dieser Edelstahl enthält neben Eisen 18 % Chrom und 8 % Nickel. Man kann Nirosta herstellen, indem man reinem Stahl die erforderlichen Mengen Chrom und Nickel zusetzt und diese Mischung zusammenschmilzt. Man kann aber auch verschiedene Stahllegierungen, die bereits Chrom und Nickel enthalten, zusammenschmelzen, um V2A-Stahl zu erhalten.

Aus zwei Legierungen mit

1) 14 % Chrom und 10 % Nickel und

2) 24 % Chrom und 5 % Nickel

erhält man z.B. eine Tonne Nirosta, wenn man 0,6 t der ersten und 0,4 t der zweiten Sorte zusammenschmilzt. In einer Tonne der beiden Legierungen sind nämlich 0,14 t bzw. 0,24 t Chrom enthalten. Der Chromgehalt der neuen Legierung beträgt also

$$0{,}14 \cdot 0{,}6\,t + 0{,}24 \cdot 0{,}4\,t = 0{,}084\,t + 0{,}096\,t = 0{,}18\,t.$$

Entsprechend ergibt sich für den Nickelgehalt der neuen Legierung:

$$0{,}1 \cdot 0{,}6\,t + 0{,}05 \cdot 0{,}4\,t = 0{,}06\,t + 0{,}02\,t = 0{,}08\,t.$$

Also enthält die Mischung 18 % Chrom und 8 % Nickel, ist also tatsächlich V2A-Stahl.

3. Wir fragen nun, ob man Nirosta auch aus den folgenden vier Legierungen herstellen kann und welche Mengen man ggf. von den einzelnen Sorten in die Schmelze einbringen muß.

	Legierung 1	Legierung 2	Legierung 3	Legierung 4
Gehalt an Chrom	24 %	4 %	14 %	14 %
Gehalt an Nickel	4 %	12 %	0 %	16 %

Wir bezeichnen die Anzahl der Tonnen, die man zur Herstellung von einer Tonne Nirosta von der k-ten Legierung nehmen muß, mit x_k (für $k=1, 2, 3, 4$). Weil wir unsere Berechnung auf die Herstellung **einer** Tonne Nirosta beziehen, muß gelten:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=1 \quad \text{mit } x_k \geq 0 \quad (\text{für } k=1,2,3,4).$$

Dies ist eine lineare Gleichung in den vier Variablen x_1, x_2, x_3 und x_4.
Die neue Legierung muß 18 % Chrom und 8 % Nickel, also 0,18 t Chrom und 0,08 t Nickel enthalten; daher muß gelten:

$$0{,}24 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2 + 0{,}14 \cdot x_3 + 0{,}14 \cdot x_4 = 0{,}18$$

$$\text{und} \quad 0{,}04 \cdot x_1 + 0{,}12 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0{,}16 \cdot x_4 = 0{,}08.$$

Da für eine Lösung $(x_1|x_2|x_3|x_4)$ unseres Problems alle drei Gleichungen erfüllt sein müssen, sind diese drei Gleichungen **konjunktiv** (also durch „und") zu verknüpfen:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \wedge\ 0{,}24 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2 + 0{,}14 \cdot x_3 + 0{,}14 \cdot x_4 = 0{,}18 \\ \wedge\ 0{,}04 \cdot x_1 + 0{,}12 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0{,}16 \cdot x_4 = 0{,}08. \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem von drei Gleichungen mit vier Variablen. Allerdings ist bei diesem Beispiel überdies noch die Bedingung

$$x_k \geq 0 \quad (\text{für } k=1,2,3,4)$$

zu beachten.
Wir werden die Lösung dieses Problems in §7, II (Seite 118) bestimmen.

4. Bisher hatten wir es meist mit zwei Arten von linearen Gleichungssystemen zu tun:

1) mit Systemen aus zwei Gleichungen mit zwei Variablen und

2) mit Systemen aus drei Gleichungen mit drei Variablen.

Beispiele: **1)** $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ \wedge\ 5x-3y=4 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3x+2y-z=6 \\ \wedge\ 2x-y+3z=9 \\ \wedge\ x+y-z=0 \end{cases}$

Diese Systeme enthalten **ebenso viele** Variable wie Gleichungen. Beim Beispiel unter 3. ist dies nicht der Fall; dieses System besteht aus drei Gleichungen mit vier Variablen. Wir werden im folgenden auch lineare Gleichungssysteme betrachten, bei denen die Anzahl der Gleichungen (m) von der Anzahl der Variablen (n) verschieden ist.
Außerdem werden wir gelegentlich – z.B. bei allgemeinen Überlegungen – die Variablen nicht mit x, y, z, sondern mit x_1, x_2, x_3, allgemein mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen.

5. Wir definieren zunächst die grundlegenden Begriffe.

D 6.1 **Unter einer „linearen Gleichung mit n Variablen" versteht man eine Gleichung, die durch Äquivalenzumformungen auf die Form**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = r \qquad (\text{mit } a_1, a_2, \ldots, a_n, r \in \mathbb{R})$$

gebracht werden kann.

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen die **„Koeffizienten"**, die Zahl r heißt das **„Absolutglied"** der linearen Gleichung. (Der Name „Absolutglied" bedeutet natürlich **nicht,** daß die Zahl r immer positiv bzw. nichtnegativ sein müßte.)

D 6.2 **Unter einem „linearen Gleichungssystem" versteht man eine Aussageform, in der m lineare Gleichungen mit n Variablen konjunktiv miteinander verknüpft sind.**

Beispiel: Ein lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen mit 5 Variablen ist:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 3 \\ \wedge\ -x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -8 \\ \wedge\ 5x_1 - 4x_2 + 0x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 1 \end{array}\right.$$

Bemerkungen:

1) Allgemein schreibt man ein lineares Gleichungssystem häufig in der Form:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = r_1 \\ \wedge\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = r_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \wedge\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = r_m \end{array}\right.$$

Bei den Koeffizienten a_{ik} gibt also der erste Index (i) an, in welcher Gleichung diese Zahl auftritt; der zweite Index (k) gibt an, bei welcher Variablen der Koeffizient steht.

2) Die Untersuchung von Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ auf lineare Abhängigkeit führt jeweils auf ein Gleichungssystem, bei dem für die Absolutglieder auf der rechten Seite gilt:

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0.$$

In einem solchen Fall spricht man von einem **„homogenen Gleichungssystem"**; gilt dagegen für wenigstens eine Zahl auf der rechten Seite $r_k \neq 0$, so spricht man von einem **„inhomogenen Gleichungssystem"**.

3) Für die mit linearen Gleichungssystemen durchzuführenden Rechnungen ist es meistens recht umständlich, das Zeichen „$\wedge$" für die konjunktive Verknüpfung der Gleichungen mitzuschleppen. Wir **vereinbaren** daher, daß wir im folgenden das Zeichen „$\wedge$" bei einem linearen Gleichungssystem in der Regel weglassen. Wenn also mehrere lineare Gleichungen untereinander geschrieben sind, so soll dies bedeuten, daß die Gleichungen konjunktiv zu verknüpfen sind, auch wenn das Verknüpfungszeichen „$\wedge$" weggelassen ist. Die Zusammengehörigkeit der Gleichungen kennzeichnen wir in der Regel durch eine vor das ganze System gesetzte große geschweifte Klammer.

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche, welche der folgenden Gleichungen lineare Gleichungen sind! Begründung!

a) $3(x-2y)+6=4x-8$ **b)** $5x(1-y)=2(x-3y+1)$

c) $(2x+1)(y-2)=(y+5)(2x-3)$ **d)** $3(x-2y)=y+2(1-3x)$

e) $(y+3)(x-y)=(x+2)(y-4)-y^2$ **f)** $(2x+1)(y-3x)=(2y-5)(x-7)$

2. Untersuche, ob es sich um ein lineares Gleichungssystem handelt! Begründung!

a) $3x-2x(1-y)=4 \wedge x-y=1+y$ **b)** $3(x-2y)-2(y+x)=2 \wedge 2(y-3x)+6(x-2y)=-5$ **c)** $x(x+1)=3+x^2 \wedge y(1-y)=1-y^2$

3. Stelle das lineare Gleichungssystem auf, durch das ermittelt werden kann, ob die folgenden Vektoren linear abhängig sind oder nicht!

a) $\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$

4. Zeige, daß die folgenden Vektoren linear unabhängig sind!

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

5. Der Vektor $\vec{b}$ soll aus den Vektoren von Aufgabe 4a) und 4b) linear erzeugt werden. Ermittle die zugehörigen Faktoren r_1, r_2, r_3 und r_4!

a) $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}1{,}5\\2{,}5\\-1\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\\3\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

6. Eine Malzfabrik hat Gerste aus verschiedenen Anbaugebieten verarbeitet. Auf Lager sind nun drei Malzsorten A, B und C, die sich in 3 Werten, im Eiweißanteil (%), im Viskositätsfaktor und im Farbfaktor unterscheiden (vgl. Tabelle). Beim Mischen von Sorten sind Viskositätsfaktor und Farbfaktor wie Mengenanteile zu berechnen.

Sorten / Anteile	Sorte A	Sorte B	Sorte C
Eiweiß	13	11	12
Viskosität	1,5	1,6	1,8
Farbe	6,5	2,4	5,0

Eine Brauerei bestellt die Lieferung von 10 t Malz mit einem Eiweißanteil von 12,25 %, dem Viskositätsfaktor 1,6 und dem Farbfaktor 5,1. Stelle ein Gleichungssystem auf, mit dem man entscheiden kann, ob die Malzfabrik die gewünschte Mischung herstellen kann!

7. Die Verpflegung einer Expedition soll aus Konserven so zusammengestellt werden, daß die Anteile an den drei wichtigsten Bestandteilen die folgenden sind: 15 % Eiweiß, 40 % Fett und 45 % Kohlehydrate. Das Gesamtgewicht darf nicht mehr als 400 kg im Expeditionsgepäck ausmachen. Ausgewählt werden kann aus vier Sorten Konserven (vgl. Tabelle).

Anteile \ Sorten	Sorte A	Sorte B	Sorte C	Sorte D
Eiweiß	10 %	15 %	30 %	20 %
Fett	40 %	45 %	25 %	35 %
Kohlehydrate	50 %	40 %	45 %	45 %

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, mit dem entschieden werden kann, ob die Verpflegung im gewünschten Sinne zusammengestellt werden kann!

b) Beim Einkauf stellt sich heraus, daß die Konserven der Sorte C verhältnismäßig teuer sind. Stelle ein Gleichungssystem auf für den Fall, daß Sorte C nicht berücksichtigt wird!

II. Das Gaußsche Eliminationsverfahren

1. Bisher haben wir lineare Gleichungssysteme nach dem **Einsetzungsverfahren** (bzw. nach dem Sonderfall des Gleichsetzungsverfahrens) und nach dem **Additions-** bzw. **Eliminationsverfahren** gelöst. Beide Verfahren haben wir in der Sekundarstufe I ausführlich besprochen. Wir wiederholen das Wesentliche an dem folgenden **Beispiel**:

$$\left\{\begin{aligned} x+2y-4z&=-6\\ 2x+y+3z&=5\\ -3x+y+6z&=-2 \end{aligned}\right.$$

1) Wir lösen dieses System zunächst nach dem **Einsetzungsverfahren.** Wir lösen die erste Gleichung nach x auf:

$$x=-2y+4z-6.$$

In der zweiten und in der dritten Gleichung ersetzen wir die Variable x dann durch den Term $-2y+4z-6$:

$$\left\{\begin{aligned} 2(-2y+4z-6)+y+3z&=5\\ -3(-2y+4z-6)+y+6z&=-2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -3y+11z&=17\\ 7y-6z&=-20 \end{aligned}\right\}.$$

Wir lösen nun die erste Gleichung des neu erhaltenen Systems nach y auf und setzen den sich ergebenden Term in die zweite Gleichung ein: $y=\frac{11}{3}z-\frac{17}{3}$.

$$7(\tfrac{11}{3}z-\tfrac{17}{3})-6z=-20 \Leftrightarrow \tfrac{77}{3}z-\tfrac{119}{3}-\tfrac{18}{3}z=-\tfrac{60}{3} \Leftrightarrow \tfrac{59}{3}z=\tfrac{59}{3} \Leftrightarrow z=1.$$

Wir setzen nun den gefundenen Wert $z=1$ in $y=\frac{11}{3}z-\frac{17}{3}$ ein und erhalten: $y=\frac{11}{3}-\frac{17}{3}=-2$. Die gefundenen Werte für y und z setzen wir schließlich noch in die Gleichung $x=-2y+4z-6$ ein und erhalten $x=-2(-2)+4\cdot 1-6=4+4-6=2$. Es gilt also:

$$x=2 \wedge y=-2 \wedge z=1.$$

Führe die Probe am gegebenen Gleichungssystem durch (Aufgabe 1)!

Bemerkung: Man kann die Lösung als Zahlentripel angeben, also in der Form $(2|-2|1)$ oder auch als Spaltenvektor: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$. Die außerdem noch mögliche Schreibweise als Lösungsmenge $L=\{(2|-2|1)\}$ ist sehr aufwendig; sie liefert überdies keine zusätzliche Information; daher werden wir in der Regel auf diese Schreibweise verzichten.

2) Wir lösen nun dasselbe Gleichungssystem nach dem **Additionsverfahren.** Man spricht auch vom **„Eliminationsverfahren“.** Wir eliminieren zunächst die Variable x, dann die Variable y. Wir schreiben die Faktoren, mit denen die einzelnen Gleichungen multipliziert werden, seitlich neben die Gleichungen. Nach der Multiplikation mit diesen Zahlen werden die betreffenden Gleichungen **addiert.**

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l|l} x&+&2y&-&4z&=&-6 & \cdot(-2) & \cdot 3\\ 2x&+&y&+&3z&=&5 & \cdot 1 & \\ -3x&+&y&+&6z&=&-2 & & \cdot 1\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|l} x&+&2y&-&4z&=&-6 & \\ &&-3y&+&11z&=&17 & \cdot 7\\ &&7y&-&6z&=&-20 & \cdot 3\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&+&2y&-&4z&=&-6\\ &&-3y&+&11z&=&17\\ &&&&59z&=&59\end{array}\right.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich unmittelbar: $z=1$. Wir setzen diese Zahl in die zweite Gleichung ein und erhalten:

$$-3y+11=17 \Leftrightarrow 3y=-6 \Leftrightarrow y=-2.$$

Durch Einsetzen von $y=-2$ und $z=1$ in die erste Gleichung erhalten wir schließlich:

$$x-4-4=-6 \Leftrightarrow x=2.$$

Es ergibt sich also auf diese Weise selbstverständlich ebenfalls das Lösungstripel $(2|-2|1)$.

2. Das Einsetzungsverfahren hat – wie obiges Beispiel schon zeigt – den Nachteil, daß man meist schon am Anfang dividieren und dann mit Brüchen weiterrechnen muß. Dieser Nachteil wird beim Eliminationsverfahren weitgehend vermieden; höchstens im letzten Schritt muß dividiert werden.
Wir wollen uns daher mit diesem **Eliminationsverfahren** etwas näher befassen. Die Art der Durchführung des Verfahrens, wie wir sie im folgenden besprechen, geht auf den großen deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777–1855) zurück. Man spricht daher vom **„Gaußschen Eliminationsverfahren“**, kurz vom **„Gauß-Verfahren“.**

3. Bei unserem **Beispiel** hat sich am Ende das folgende Gleichungssystem ergeben:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&+&2y&-&4z&=&-6\\ &&-3y&+&11z&=&17\\ &&&&59z&=&59.\end{array}\right.$$

Man sagt: dieses Gleichungssystem hat **„Dreiecksform"**. Diese Form ist dadurch gekennzeichnet, daß die Koeffizienten unterhalb der sogenannten **„Hauptdiagonalen"** (von links oben nach rechts unten) sämtlich den Wert 0 haben. Ausführlich geschrieben lautet das System nämlich:

$$\begin{cases} x+2y-4z=-6 \\ 0x-3y+11z=17 \\ 0x+0y+59z=59. \end{cases}$$

Ein solches Gleichungssystem ist einfach zu lösen, weil man aus der letzten Gleichung den Wert für z, durch Einsetzen in die vorletzte Gleichung den Wert für y und durch Einsetzen in die erste Gleichung schließlich noch den Wert für x erhält.

4. Ziel des Eliminationsverfahrens ist es also, ein gegebenes lineares Gleichungssystem auf diese Dreiecksform zu bringen. Man erreicht dies – wie das Beispiel zeigt – in der Regel dadurch, daß man die Gleichungen zunächst mit geeigneten Zahlen multipliziert und dann addiert.
Es kann dabei zweckmäßig sein, außerdem noch Gleichungen auszutauschen.

Beispiel: $\begin{cases} -2x+2y+7z=0 \\ x-y-3z=1 \\ 3x+2y+2z=5. \end{cases}$

Der Koeffizient von x hat in der zweiten Gleichung den Wert 1; daher ist es zweckmäßig, die beiden ersten Gleichungen auszutauschen. Wir eliminieren dann x und y mit Hilfe der seitlich angegebenen Faktoren.

$$\begin{cases} x-y-3z=1 & \cdot 2 & \cdot(-3) \\ -2x+2y+7z=0 & \cdot 1 & \\ 3x+2y+2z=5 & & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-3z=1 \\ z=2 \\ 5y+11z=2 \end{cases}$$

Hier ist die Dreiecksform sofort dadurch zu erreichen, daß man die beiden letzten Gleichungen austauscht.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-2z=1 \\ 5y+11z=2 \\ z=2 \end{cases}$$

Daraus ergibt sich durch Einsetzen von $z=2$ in die zweite Gleichung:

$$5y=2-11z=2-22=-20 \Rightarrow y=-4$$

und durch Einsetzen von $y=-4$ und $z=2$ in die erste Gleichung:

$$x=y+3z+1=-4+6+1=3.$$

Das Lösungstripel ist also $(3|-4|2)$.

Daß es sich bei den durchgeführten Umformungen tatsächlich um **Äquivalenzumformungen** handelt, werden wir anschließend zeigen.

5. Wie man den behandelten Beispielen entnehmen kann, kommen beim Eliminationsverfahren die folgenden Einzelumformungen vor:

$\boxed{1}$ **Vertauschen von Gleichungen;**

$\boxed{2}$ **Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl;**

$\boxed{3}$ **Addition zweier Gleichungen.**

Wir haben zu zeigen, daß es sich hierbei stets um Äquivalenzumformungen handelt.

Zu 1): Es ist unmittelbar einsichtig, daß ein Vertauschen zweier Gleichungen in einer konjunktiven Aussageform deren Lösungsmenge nicht ändert. (Der Grund dafür ist die Gleichwertigkeit jeder Aussage $A \wedge B$ mit der entsprechenden Aussage $B \wedge A$.)

Zu 2): Daß die Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl stets eine Äquivalenzumformung ist, haben wir bereits in der 8. Klasse bewiesen. Es gilt:

$$T_1 = T_2 \Leftrightarrow cT_1 = cT_2 \qquad (\text{für } c \neq 0).$$

Zu 3): Bei der dritten Umformungsart ist Vorsicht geboten; dies zeigt das folgende

Beispiel: $\left\{\begin{array}{l} 2x+\ y+3z=-4 \\ 2x+2y+\ z=\ \ 1 \\ \ \ x+2y+3z=\ \ 1 \end{array}\right.$

Da es jeweils zwei Gleichungen gibt, in der die Koeffizienten von x bzw. von y bzw. von z übereinstimmen, könnte man auf den Gedanken kommen, jeweils diese Gleichungen zu addieren, nachdem man jeweils eine von ihnen mit -1 multipliziert hat. Wenn man dies durchführt, erhält man:

$$\left\{\begin{array}{rcr|l|l|l} 2x+\ y+3z & = & -4 & \cdot(-1) & & \cdot(-1) \\ 2x+2y+\ z & = & 1 & \cdot 1 & \cdot(-1) & \\ x+2y+3z & = & 1 & & \cdot 1 & \cdot 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} y-2z & = & 5 \\ -x\qquad +2z & = & 0 \\ -x+\ y\qquad & = & 5 \end{array}\right.$$

Wie man durch Einsetzen leicht bestätigen kann, hat das neue Gleichungssystem z.B. das Lösungstripel $(2|7|1)$. Dieses Tripel erfüllt aber nicht das gegebene Gleichungssystem. Dies gilt noch für viele weitere Tripel, z.B. für $(0|5|0)$ und für $(4|9|2)$. Lediglich das Tripel $(-2|3|-1)$ erfüllt beide Gleichungssysteme (Aufgabe 2).

Hier ist also **keine Äquivalenzumformung,** sondern nur eine **Folgerungsumformung** durchgeführt worden. Der Grund dafür liegt darin, daß wir die Gleichungen des gegebenen Systems beliebig miteinander kombiniert, dabei aber **keine Gleichung des gegebenen Systems ins neue System übernommen** haben. Allgemein gilt natürlich: $T_1 = T_2 \wedge T_3 = T_4 \Rightarrow T_1 + T_3 = T_2 + T_4$; denn, wenn die beiden Gleichungen $T_1 = T_2$ und $T_3 = T_4$ erfüllt sind, ist selbstverständlich auch die Gleichung $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ erfüllt.

Aus der Gleichung $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ kann man das System $T_1 = T_2 \wedge T_3 = T_4$ aber nur dann zurückgewinnen, wenn man eine der beiden Gleichungen ($T_1 = T_2$ oder $T_3 = T_4$) konjunktiv mit der neuen Gleichung $T_1 + T_3 = T_2 + T_4$ verknüpft.

Es gilt z.B. $T_1 + T_3 = T_2 + T_4 \wedge T_3 = T_4 \Rightarrow T_1 = T_2$.

Wir zeigen dies, indem wir von der ersten Gleichung die zweite subtrahieren:

$$\begin{aligned} &(T_1+T_3)-T_3=(T_2+T_4)-T_4\\ \Rightarrow\ &T_1+(T_3-T_3)=T_2+(T_4-T_4)\\ \Rightarrow\ &\quad T_1+0 \quad = \quad T_2+0\\ \Rightarrow\ &\quad T_1 \quad = \quad T_2, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Genauso kann man zeigen, daß gilt: $T_1+T_3=T_2+T_4 \wedge T_1=T_2 \Rightarrow T_3=T_4$ (Aufgabe 3a).

Insgesamt gilt also z.B. $\mathbf{T_1=T_2 \wedge T_3=T_4 \Leftrightarrow T_1=T_2 \wedge T_1+T_3=T_2+T_4}$.

Jeder **einzelne Umformungsschritt** stellt also mit Sicherheit eine Äquivalenzumformung dar, wenn man eine der beiden benutzten Gleichungen in das neue Gleichungssystem übernimmt. Insgesamt können wir feststellen:

S6.1 **Bei einem linearen Gleichungssystem sind die folgenden Umformungen stets Äquivalenzumformungen:**

1) Vertauschen von Gleichungen;

2) Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl;

3) Ersetzen einer Gleichung durch die Summe aus dieser und einer anderen Gleichung.

6. Bei der Durchführung des Gaußverfahrens geht man am besten so vor, daß man zur Elimination einer Variablen stets mit **derselben** Gleichung arbeitet und diese dann in das neue System übernimmt. In den meisten Fällen ist es zweckmäßig, bei der Elimination der ersten Variablen mit der ersten Gleichung, bei der Elimination der zweiten Variablen mit der (neuen) zweiten Gleichung zu arbeiten, usw.
Dies ist jedoch nur möglich, wenn für den Koeffizienten c_{ii}, der beim jeweiligen Umformungsschritt in der Hauptdiagonale der betreffenden Zeile steht, gilt: $c_{ii} \neq 0$.
Ist $c_{ii}=0$, so muß man Gleichungen (und evtl. auch Variable) austauschen. Mit solchen Vertauschungen kann man gelegentlich auch Rechenvorteile erzielen. Wir werden auf diese Probleme in § 7, II zurückkommen.

7. Abschließend lösen wir das Gleichungssystem des letzten **Beispiels** korrekt mit dem Gaußverfahren. Wir tauschen zunächst die erste mit der dritten Gleichung aus, weil die Variable x in der dritten Gleichung den Koeffizienten 1 hat.

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
 & \left\{\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2x+2y+z&=1\\ 2x+y+3z&=-4\end{aligned}\right. & \begin{array}{l}\cdot(-2)\\ \cdot 1\\ \end{array} & \begin{array}{l}\cdot(-2)\\ \\ \cdot 1\end{array} & \\
\hline
\Leftrightarrow & \left\{\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ -2y-5z&=-1\\ -3y-3z&=-6\end{aligned}\right. & & & \begin{array}{l}\\ \cdot 3\\ \cdot(-2)\end{array}\\
\hline
\Leftrightarrow & \left\{\begin{aligned} x+2y+3z&=1\\ 2y-5z&=1\\ -9z&=9\end{aligned}\right. & & & \\
\hline
\end{array}$$

Daraus ergibt sich: $z=-1$; $2y=1-5z=1+5=6 \Rightarrow y=3$ und

$x=1-2y-3z=1-6+3 \Rightarrow x=-2$. Das Lösungstripel ist also $(-2|3|-1)$.

Führe die Probe am gegebenen System durch (Aufgabe 2)!

Übungen und Aufgaben

1. Bestätige, daß $(2|-2|1)$ Lösung des Gleichungssystems von Beispiel 1) (Seite 99) ist!

2. Bestätige, daß das umgeformte Gleichungssystem von Seite 102 die Lösungen $(2|7|1)$, $(0|5|0)$, $(4|9|2)$ und $(-2|3|-1)$ hat, daß aber nur das Tripel $(-2|3|-1)$ das vorgegebene **und** das umgeformte Gleichungssystem erfüllt!

3. Beweise: **a)** $T_1+T_3=T_2+T_4 \wedge T_1=T_2 \Rightarrow T_3=T_4$ und
   b) $T_1+T_3=T_2+T_4 \wedge T_1=T_4 \Rightarrow T_3=T_2$!

4. Löse mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die linearen Gleichungssysteme!

a) $\begin{cases} 4x+3y+3z=6 \\ x+3y-z=4 \\ 4x+2y+3z=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x+4y+2z=2 \\ -x+4y+4z=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-3y-4z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 5x-y-3z=-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+2y+5z=-1 \\ -x-3y+z=5 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2x+3y-z=1 \\ 7x-3y+5z=4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+5y+z=1 \\ x-3y-3z=1 \\ 3x+4y-2z=-2 \end{cases}$

5. Auf einer Kleinkunstbühne verblüfft ein Zauberkünstler seine Zuschauer beim Zahlen-Raten: ein Zuschauer soll sich drei Zahlen denken und dann die drei Summen von je zwei der drei Zahlen laut nennen. Auf Anhieb ruft der „Zauberer" dann die gedachten Zahlen in den Raum. Hat er sie geraten?
   a) Die drei Summen von je zwei Zahlen seien 6, 11 und 15. Ermittle mit dem Gaußverfahren die drei gedachten Zahlen!
   b) Als der Zauberkünstler einem Freund seinen „Trick" verrät, entpuppt er sich als ein „Schnellrechner": er addiert die drei laut genannten Summen von je zwei der gedachten Zahlen und erhält dadurch die doppelte Summe aller drei Zahlen, also $2x+2y+2z$. Diese Summe halbiert er und subtrahiert von dem Ergebnis, also von $x+y+z$ der Reihe nach die drei laut genannten Zweiersummen. Das Ergebnis ist jeweils **eine** der drei gedachten Zahlen. Rechne dieses Lösungsverfahren mit den in **a)** gegebenen Zweier-Summen durch! Könnte man das Gaußverfahren auch so anwenden?

6. Der Schnellrechner (Aufgabe 5) ändert seinen „Trick" ab: er läßt sich wieder drei Zahlen nennen; aber diesmal soll der Zuschauer jeweils zwei der drei gedachten Zahlen addieren und die dritte subtrahieren. Untersuche, wie der „Trick" jetzt funktioniert!
   a) Ermittle aus den drei genannten Zahlen 4, 6 und 10 (3, 5 und 7) die drei gedachten!
   b) Ein Student will den „Zauberer" auf die Probe stellen und ruft ihm die Zahl -9, 1 und 13 zu. Klappt der „Trick" auch diesmal?
   c) Untersuche, ob der Rechen-Trick immer gelingt!

7. In einer Serie von Signalfarben sind nur zwei Grundfarben, ein roter Farbton und ein gelber Farbton, mit unterschiedlichen Anteilen gemischt. In einer Fabrikhalle sollen Notausgangstüren angestrichen werden:
in einer helleren Ecke der Halle in einer Signalfarbe mit 60 % Rotanteilen und 40 % Gelbanteilen,
in einer dunkleren Ecke der Halle in einer Signalfarbe mit 30 % Rot und 70 % Gelb.
Im Materiallager finden die Arbeiter nur noch zwei Behälter mit Farbe vor; einen mit 10 % Gelb und 90 % Rot und einen zweiten mit 90 % Gelb und 10 % Rot.
Lassen sich die gewünschten Farben aus ihnen mischen?

III. Die Darstellung von linearen Gleichungssystemen durch Matrizen

1. Bei den Umformungen eines linearen Gleichungssystems nach dem Gauß-Verfahren haben wir stets nur mit dem Koeffizienten und den Absolutgliedern des Systems gearbeitet, **nicht** aber mit den Variablen. Man kann daher die bei der Durchführung dieses Verfahrens zu leistende Schreibarbeit dadurch erheblich reduzieren, daß man nur die Koeffizienten und die Absolutglieder des Systems aufschreibt, die Variablen also wegläßt.

Beispiel: Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} -x-2y+4z= 6 \\ 2x+ y+3z= 5 \\ 3x+3y-2z=-2 \end{cases}$$

wird vollständig erfaßt durch das folgende Zahlenschema:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ein solches rechteckiges Zahlenschema (in runde Klammern eingeschlossen) nennt man eine **„Matrix“** (Plural: „Matrizen“). Diese Matrix hat drei **Zeilen** und vier **Spalten.**
Für das Gleichungssystem ist ferner die Matrix von Bedeutung, die nur die Koeffizienten des Systems enthält, bei obigem Beispiel also die Matrix:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt **„Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems“**; sie hat bei diesem Beispiel drei Zeilen und drei Spalten. Im Gegensatz dazu heißt die Matrix, die außer den Koeffizienten noch die Absolutglieder in der letzten Spalte enthält, die **„erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems“**. Wir bezeichnen die Koeffizientenmatrix in der Regel mit A, die erweiterte Matrix in der Regel mit B. Da man einer gegebenen Matrix nicht ohne Zusatzinformation ansieht, ob es sich um die Koeffizientenmatrix A oder um die erweiterte Matrix B handelt, trennen wir in der erweiterten Matrix B die letzte Spalte durch einen vertikalen Strich von den Koeffizienten ab.

2. Allgemein definiert man:

D 6.3 Zu einem linearen Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=r_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=r_m \end{array}\right.$$ **gehören die „Koeffizientenmatrix"**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ **und die erweiterte Matrix** $$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & r_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & r_m \end{array}\right).$$

Bemerkungen:

1) Bei einem Koeffizienten a_{ik} gibt der **erste Index** (i) die **Zeile,** der **zweite Index** (k) die **Spalte** an, in der a_{ik} steht.

2) Bei Umformungen arbeiten wir in der Regel mit der Matrix B, weil die Matrix A ganz in B enthalten ist.

3. Wir zeigen nun, wie man ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe der erweiterten Matrix nach dem Gaußverfahren lösen kann. Dabei benutzen wir zur Kennzeichnung der Umformungen die folgenden Zeichen:

1) $\leftrightarrows$ bedeutet: die Zeilen, an denen die Pfeilspitzen stehen, werden ausgetauscht.

2) $|\cdot a$ bedeutet: die betreffende Zeile wird mit a multipliziert.

3) $\begin{array}{l}|\cdot a\\ \downarrow\cdot b\end{array}$ bedeutet: die mit a multiplizierte obere Zeile wird zur mit b multiplizierten unteren Zeile addiert.

4) $\begin{array}{l}\uparrow\cdot a\\ |\cdot b\end{array}$ bedeutet: die mit b multiplizierte untere Zeile wird zur mit a multiplizierten oberen Zeile addiert.

Außerdem kennzeichnen wir den Übergang von einer Matrix zur nächsten durch einen waagerechten Pfeil (→).

<u>**Beispiel:**</u> $\left\{\begin{array}{l} -x-2y+4z=\ \ 6 \\ 2x+\ \ y+3z=\ \ 5 \\ 3x+3y-2z=-2 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l}|\cdot 2\\ \downarrow\cdot 1\\ \ \end{array}\begin{array}{l}|\cdot 3\\ | \\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 11 & 17 \\ 0 & -3 & 10 & 16 \end{array}\right)\begin{array}{l}\ \\ |\cdot(-1)\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist die Dreiecksform erreicht. Aus der letzten Zeile ergibt sich: $-z=-1$, also $z=1$. Aus der zweiten Zeile entnimmt man:

$$-3y+11z=17 \Leftrightarrow -3y=17-11=6 \Rightarrow y=-2.$$

Aus der ersten Zeile erhält man schließlich:

$$-x-2y+4z=6 \Leftrightarrow x=-2y+4z-6=4+4-6=2.$$

Das Lösungstripel ist also $(2|-2|1)$.

4. Statt bei der Dreiecksform der Matrix aufzuhören, kann man das Gaußverfahren noch weiterführen. Man kann nämlich bei diesem Beispiel die Koeffizienten oberhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix auch noch zu Null machen dadurch, daß man zunächst mit den Zahlen der letzten, dann mit den Zahlen der vorletzten Zeile arbeitet. Die Zahlen, auf die es bei den einzelnen Umformungsschritten ankommt, sind in der gleichen Farbe gekennzeichnet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & \boxed{4} & 6 \\ 0 & -3 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \uparrow\cdot 1 \\ \uparrow\cdot 1 & \\ \cdot 11 & \cdot 4 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:(-3) \\ \\ \end{array}$$

Um einfacher rechnen zu können, dividieren wir nun die Zahlen der zweiten Zeile durch -3; dann erhalten wir in der Mitte der Matrix die Zahl 1:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow\cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ \\ |\cdot(-1) \end{array}$$

Zum Schluß multiplizieren wir noch die erste und die letzte Zeile mit (-1), um in der Hauptdiagonalen der Matrix A überall die Zahl 1 zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Dieser Matrix kann man unmittelbar die Lösung des Gleichungssystems entnehmen:

$$x=2 \wedge y=-2 \wedge z=1.$$

5. Die Koeffizientenmatrix ist bei diesem Verfahren auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gebracht worden. Diese Matrix hat **„Diagonalform"**, weil nur die Hauptdiagonale (von links oben nach rechts unten) mit von Null verschiedenen Zahlen besetzt ist. In diesem Falle haben die Zahlen in der Hauptdiagonale sogar sämtlich den Wert 1; daher nennt man diese Matrix eine **„Einheitsmatrix"**; genauer handelt es sich um die Einheitsmatrix mit drei Zeilen und drei Spalten, also um die **„dreireihige Einheitsmatrix"**.

Bemerkung: Nicht jede Matrix läßt sich – wie wir unten noch sehen werden – auf diese Form bringen. Meistens sind die durchzuführenden Rechnungen auch unangenehmer als bei obigem Beispiel, weil in der Regel Bruchzahlen nicht zu vermeiden sind. Wir werden daher dieses vervollständigte Gaußverfahren nur gelegentlich anwenden.

6. Wir behandeln abschließend ein weiteres <u>**Beispiel**</u> für das erweiterte Gaußverfahren:

$$\begin{cases} 2x+\ y+\ z=\ 1 \\ 2x-2y-\ z=-7 \\ 4x+\ y+3z=\ 1 \end{cases}$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |\cdot(-1) & |\cdot(-2) \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot 1 \\ \downarrow\cdot(-3) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-1) \\ |:(-5) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \uparrow\cdot 1 \\ \uparrow\cdot 1 & \\ |\cdot(-2) & |\cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:3 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow\cdot 1 \\ |\cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dieser Matrix kann man die Lösung des Gleichungssystems unmittelbar entnehmen:

$$x=-1 \wedge y=2 \wedge z=1.$$

Das Lösungstripel ist also $(-1|2|1)$.

7. Die in diesem Abschnitt durchgeführten Beispiele sind alle von der gleichen Art: drei Gleichungen mit drei Variablen. Außerdem haben wir nur Systeme mit eindeutiger Lösung behandelt. Wir wissen aber schon seit langem, daß lineare Gleichungssysteme auch unerfüllbar sein oder unendlich viele Lösungen haben können. Mit solchen Systemen werden wir uns in § 7 beschäftigen.

Übungen und Aufgaben

1. Stelle für die folgenden linearen Gleichungssysteme die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Matrix auf! Bringe die Koeffizientenmatrix nach Möglichkeit auf die Diagonalform! Löse die Gleichungssysteme!

a) $\begin{cases} x+2y+\ z=1 \\ x+4y+3z=1 \\ 2x-2y+\ z=7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y-2z=-6 \\ \quad\ \ y+\ z=\ 0 \\ 3x\quad\ -2z=\ 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+4y+2z=0 \\ x+\ y+\ z=0 \\ 4x+4y\quad\ =0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ x+y\quad\ =1 \end{cases}$

2. Löse das Gleichungssystem mit dem erweiterten Gaußverfahren!

a) $\begin{cases} 4x+3y-3z-8u=-10 \\ x-\ y+\ z+4u=\ 13 \\ -4x-2y+\ z+3u=-\ 3 \\ 3x-\ y-2z-7u=-\ 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+\ z-\ u=\ 0 \\ x+y-\ z-\ u=\ 6 \\ x-y-\ z+\ u=-2 \\ 2x+y-2z+3u=\ 0 \end{cases}$

3. Stelle für die im Lehrtext des II. Abschnittes behandelten linearen Gleichungssysteme jeweils die Koeffizientenmatrix und die erweiterte Matrix auf! Überführe die Koeffizientenmatrix in die Einheitsmatrix und löse so das betreffende Gleichungssystem! Vergleiche die Lösungsverfahren hinsichtlich Rechnungsumfang und Durchsichtigkeit!

4. Der Rechenkünstler erhält aus dem Publikum die folgenden drei Zahlen -1, 10, 3 als Zweiersummen (vgl. S. 104, Aufgabe 5). Ermittle die drei gedachten Zahlen mit Hilfe des erweiterten Gaußverfahrens!

5. Der Rechenkünstler (vgl. Aufgabe 4) läßt sich zu dem „Gemütlichen Abend“ eines Mathematiker-Kongresses einladen, er denkt sich einen schwierigen „Trick“ aus und hofft, dabei nicht durchschaut zu werden.
Von vier gedachten Zahlen sollen jeweils drei addiert und die vierte subtrahiert werden. Ein Zuschauer ruft ihm die vier Ergebnisse 2, 4, 8 und 10 zu. Ermittle die vier gedachten Zahlen!

6.

Sorten / Anteile	Legierung I	Legierung II	Legierung III
Kupfer	80 %	95 %	80 %
Zink	20 %	0 %	10 %
Zinn	0 %	5 %	10 %

Im Maschinenbau werden Federn und Membranen oft aus Kupferlegierungen hergestellt, die 90 % Kupfer, 5 % Zink und 5 % Zinn enthalten.

Kupferhütten bieten drei Legierungen mit anderen Zusammensetzungen an (vergleiche Tabelle). Untersuche, ob sich die gewünschte Legierung aus den drei angebotenen zusammenschmelzen läßt!

7.

Sorten / Anteile	Fleisch	Nudeln	Gemüse
E	10 g	10 g	40 g
F	40 g	0 g	10 g
C	30 g	70 g	30 g

Fleisch, Nudeln und Gemüse enthalten wichtige Nahrungsbestandteile wie Eiweiß (E), Fett (F) und Kohlehydrate (C) in bestimmten Anteilen (vgl. Tabelle). Die Angaben dort beziehen sich auf je 100 g Fleisch oder Nudeln oder Gemüse.

a) Für Katastrophenfälle möchte man eine Nahrung herstellen, die 140 g Eiweiß (E), 100 g Fett (F) und 400 g Kohlehydrate (C) enthält. Untersuche, ob und mit welchen Anteilen an Fleisch, Nudeln und Gemüse das möglich ist! Welches Gesamtgewicht hätte eine solche Portion?

b) Für eine bestimmte Diät soll aus Fleisch und Gemüse eine Mahlzeit hergestellt werden, die 150 g Eiweiß (E) und 100 g Fett (F) enthält. Ermittle, wie Fleisch und Gemüse an dieser Mahlzeit beteiligt sind und welchen Anteil an Kohlehydraten (C) sie hat!

§ 7 Lineare Gleichungssysteme (II)

I. Nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme

1. Schon in der 8. Klasse haben wir lineare Gleichungssysteme kennengelernt, die nicht eindeutig lösbar sind.

Beispiele: 1) $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ -3x+6y=-9 \end{cases}$

Wir wenden auf die erweiterte Matrix B dieses Gleichungssystems das Gaußverfahren an:

$$B=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot 3 \\ \downarrow\cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) |:2 \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es entsteht also eine Zeile, die an allen Stellen mit der Zahl 0 besetzt ist. Dieser Zeile entspricht die Gleichung

$$0\cdot x+0\cdot y=0.$$

Da diese Gleichung allgemeingültig ist, hat sie keinen Einfluß auf die Lösungsmenge. Diese wird allein durch die Gleichung bestimmt, die zur ersten Zeile gehört:

$$x-2y=3;$$

dies ist die Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene.
Der Grund für dieses Ergebnis ist leicht zu finden: die beiden Gleichungen des gegebenen Systems stellen **dieselbe Gerade** dar; dies können wir durch Umformung auf die Normalform leicht nachweisen:

$$2x-4y=6 \Leftrightarrow 4y=2x-6 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2} \quad \text{und}$$

$$-3x+6y=9 \Leftrightarrow 6y=3x-9 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2} \quad \text{(Bild 7.1).}$$

Das Gleichungssystem ist also **erfüllbar, aber nicht eindeutig** lösbar. Die Werte einer Variablen können frei gewählt werden; dann liegt der Wert der anderen Variablen fest; z.B. erhält man für $x=3$ den Wert $y=0$, für $x=5$ den Wert $y=1$, usw. Man kann die Lösungsmenge folgendermaßen schreiben:

$$L=\{(x|y)\mid x-2y=3\}.$$

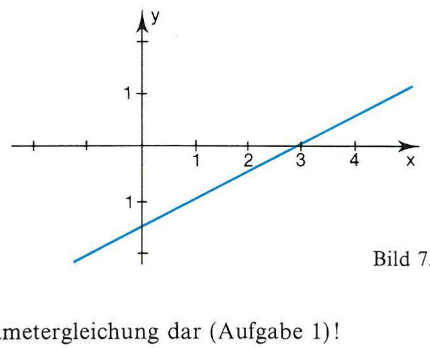


Bild 7.1

Stelle die betreffende Gerade auch durch eine Parametergleichung dar (Aufgabe 1)!

2) $\begin{cases} 2x-4y=6 \\ -3x+6y=12 \end{cases}$

Wir wenden auf die erweiterte Matrix B wiederum das Gaußverfahren an:

$$B=\left(\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 42 \end{array}\right).$$

Die der zweiten Zeile entsprechende Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y = 42$ ist unerfüllbar; mithin ist auch das ganze Gleichungssystem unerfüllbar.
Auch in diesem Fall kann man das Ergebnis leicht geometrisch interpretieren. Wir formen die Gleichungen in die Normalform um:

$$2x-4y=6 \Leftrightarrow 4y=2x-6 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}-\frac{3}{2} \quad \text{und}$$

$$-3x+6y=12 \Leftrightarrow 6y=3x+12 \Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+2 \quad \text{(Bild 7.2).}$$

Da beide Geraden die Steigung $\frac{1}{2}$, aber unterschiedliche Abschnitte mit der y-Achse haben, handelt es sich um zwei verschiedene zueinander parallele Geraden. Da diese Geraden keinen Schnittpunkt haben, ist das Gleichungssystem **unerfüllbar.**

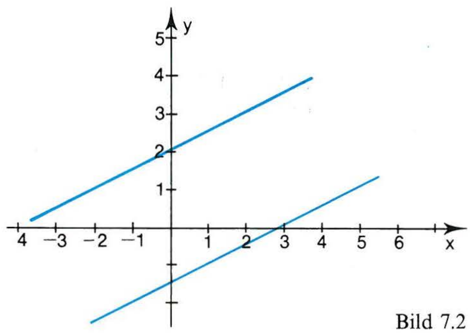


Bild 7.2

2. Wir betrachten nun Gleichungssysteme, die aus zwei linearen Gleichungen mit drei Variablen, also aus zwei Ebenengleichungen bestehen.

<u>**Beispiele**</u>: **1)** $\begin{cases} 2x-y+3z=-2 \\ -4x+2y-6z=4 \end{cases}$

Wir wenden auf die zugehörige Matrix B wiederum das Gaußverfahren an:

$$B=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -6 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \downarrow \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Ergebnis der Umformung zeigt, daß sich die zweite Gleichung aus der ersten durch Multiplikation mit dem Faktor -2 ergibt. Die beiden Gleichungen sind also äquivalent; sie stellen dieselbe Ebene dar.
Die Werte von zwei Variablen, z.B. von x und y, können frei gewählt werden; dann ist der Wert der dritten Variablen z festgelegt; z.B. gehört zu $x=y=1$ der Wert $z=-1$.

2) $\begin{cases} 2x-y+3z=-2 \\ -4x+2y-6z=5 \end{cases}$

Wir wenden auf die zugehörige Matrix B das Gaußverfahren an:

$$B=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die zweite Zeile zeigt, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist. Die beiden Gleichungen stellen zueinander parallele Ebenen dar.

3) $\begin{cases} x-3y+z=4 \\ -2x+4y-3z=-9 \end{cases}$; $B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & -3 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \downarrow \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Die beiden Gleichungen stellen zwei nicht parallele Ebenen dar. Die Schnittgerade der beiden Ebenen können wir in Parameterform darstellen. Setzen wir z.B. $y=t$, so ergibt sich aus der zweiten Zeile der letzten Matrix $-2t-z=-1 \Leftrightarrow z=1-2t$ und damit aus der ersten Gleichung

$$x-3t+(1-2t)=4 \Leftrightarrow x=3+5t.$$

Durch Zusammenfassung der drei Gleichungen erhält man: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Bemerkung: Man kann die Lösungsmenge ausführlich auch in der Form

$$L=\{(x|y|z) \mid x=3+5t \wedge y=t \wedge z=1-2t \wedge t\in\mathbb{R}\}$$

oder in der Kurzform $L=\{(3+5t|t|1-2t) \mid t\in\mathbb{R}\}$ schreiben.

3. Wir betrachten nun Gleichungssysteme, die aus drei Gleichungen mit drei Variablen, also aus drei Ebenengleichungen bestehen.

Beispiele: 1) $\begin{cases} x-2y-z=-2 \\ -3x+6y+3z=6 \\ 2x-4y-2z=-4 \end{cases}$

Wir wenden wiederum das Gaußverfahren auf die erweiterte Matrix B an:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot(-2) \\ \downarrow\cdot 1 \\ \quad\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Ergebnis zeigt, daß die zweite und die dritte Gleichung Vielfache der ersten Gleichung sind, daß die drei Gleichungen also **dieselbe** Ebene darstellen. Auch hier können die Werte von zwei Variablen frei gewählt werden; dann liegt der Wert für die dritte Variable fest. Setzt man z.B. $x=r$ und $y=s$, dann ergibt sich $z=2+x-2y=2+r-2s$.
Die Lösungsmenge ist also darstellbar in der Form

$$L=\{(x|y|z) \mid x=r \wedge y=s \wedge z=2+r-2s \wedge r,s\in\mathbb{R}\},$$

in der Kurzform $L=\{(r|s|2+r-2s) \mid r,s\in\mathbb{R}\}$
oder durch die Parametergleichung für die Ebene: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

2) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y+z=1 \\ 3x-y+z=-2 \end{cases}$

Wir formen die zugehörige Matrix B um:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Ergebnis zeigt, daß das Gleichungssystem erfüllbar, aber nicht eindeutig lösbar ist; denn die zur dritten Zeile gehörende Gleichung $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ ist allgemeingültig.
Man kann in diesem Fall eine Variable durch einen Parameter erfassen. Setzt man z.B. $y = t$, so ergibt sich aus der zweiten Zeile: $2t + z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2t$
und damit aus der ersten Zeile: $x + t + (1 - 2t) = 0 \Rightarrow x = -1 + t$.
Die Lösungsmenge ist also darstellbar in der Form

$$L = \{(x|y|z) \mid x = -1 + t \wedge y = t \wedge z = 1 - 2t \wedge t \in \mathbb{R}\},$$

in der Kurzform $L = \{(-1 + t|t|1 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ oder durch die Parametergleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

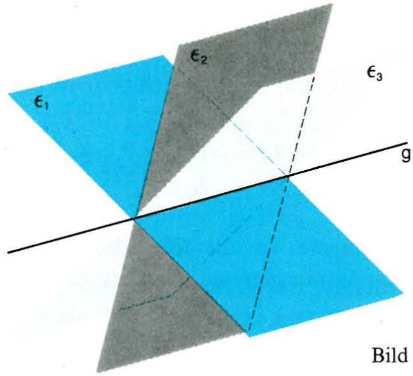


Bild 7.3

Die drei Ebenen, die zu den Gleichungen des gegebenen Systems gehören, schneiden sich in der durch diese Gleichung dargestellten Geraden (Bild 7.3). Bestätige, daß die Gerade in allen drei Ebenen liegt (Aufgabe 6)!

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} x + y - z &= 4 \\ 4x - 2y - 2z &= 3 \\ -5x + 4y + 2z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Die Umformung der erweiterten Matrix B liefert:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4)\ \cdot 5 \\ \downarrow \cdot 1 \\ \downarrow \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 9 & -3 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \downarrow \cdot 2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Die letzte Zeile zeigt, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist. Wie dieser Fall geometrisch zu deuten ist, können wir hier nur mitteilen: je zwei der drei Ebenen – also $(\varepsilon_1|\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1|\varepsilon_3)$ und $(\varepsilon_2|\varepsilon_3)$ – schneiden sich in je einer Geraden. Diese drei Geraden sind zueinander **parallel,** aber nicht identisch (Bild 7.4).
Bestätige dies dadurch, daß du die Parametergleichung für die drei Schnittgeraden ermittelst (Aufgabe 7)!

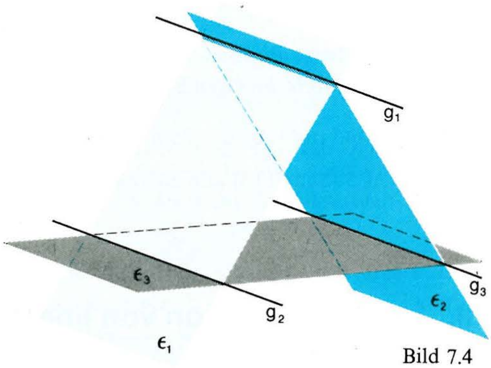


Bild 7.4

Übungen und Aufgaben

1. Die Lösungsmenge des Beispiels 1) von Seite 110 ist $L = \{(x|y) \mid x - 2y = 3\}$. Stelle die betreffende Gerade auch durch eine Parametergleichung dar!

2. Behandle die folgenden linearen Gleichungssysteme nach dem erweiterten Gaußverfahren und deute die Ergebnisse geometrisch!

a) $\left\{\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ -2x + 6y &= 2 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} -3x + 4y &= 4 \\ 1{,}5x - 2y &= -2 \end{aligned}\right.$ **c)** $\left\{\begin{aligned} x - 2y &= 3 - x + y \\ 2x + 3y &= 4 + 3x + 1{,}5y \end{aligned}\right.$

3. Untersuche, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme erfüllbar sind und bestimme die Lösungsmengen! Deute die Ergebnisse geometrisch!

a) $\begin{cases} -3x+4y=-10 \\ 4x-3y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2(x-y)-3=4y+5 \\ 2(x+2y+4)=5(x-y)-4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x-4y=6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 0{,}5x-y=3 \\ -1{,}5x+5y=7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 5x+y=2(1+x-y) \\ -3(2x+y)=3y-4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ -x+3y-z=3 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 3(x-y)+z=2(z-y-1) \\ 4(y-x)+z=2(x+y+3)-z \end{cases}$

4. Zeichne die Geraden g_1, g_2 und g_3! Untersuche an Hand der Zeichnung, ob das zugehörige Gleichungssystem erfüllbar ist oder nicht! Ermittle die Lösungsmenge!

a) g_1: $x-3y=4$, g_2: $2x+y=1$, g_3: $4x-5y=9$
b) g_1: $3x+2y=-1$, g_2: $4x+y=-2$, g_3: $6x+4y=3$
c) g_1: $x-2y=3$, g_2: $-2x+4y=-6$, g_3: $-x+2y=-3$

5. Untersuche, ob die folgenden Gleichungssysteme lösbar sind oder nicht! Ermittle die Lösungsmengen und deute sie geometrisch!

a) $\begin{cases} x-y+z=6 \\ 2x+4y-z=-3 \\ -x-2y+3z=9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y+z=1 \\ -2x+4y-z=-2 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y-4z=-2 \\ -x+4y+z=-10 \\ x+y+5z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+2z=9 \\ -x+2y-z=6 \\ y+z=4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+0{,}5z=1 \\ -3x+1{,}5y-0{,}75z=-1{,}5 \\ -8x+4y-2z=-4 \end{cases}$ f) $\begin{cases} -x+y-z=-4 \\ 3x+y+2z=3 \\ -4x-4y+2z=6 \end{cases}$

6. Bestätige beim Beispiel 2) von Seite 112, daß die Lösungsgerade in jeder der drei Ebenen liegt, die durch die Gleichungen des Systems dargestellt werden!

7. Bestätige, daß die drei Schnittgeraden von je zwei Ebenen zu den Gleichungen von Beispiel 3 (Seite 113) alle zueinander parallel sind!

II. Klassifikation von linearen Gleichungssystemen

1. Wie bei den behandelten Beispielen kann man grundsätzlich in jedem Fall vorgehen. Wir wollen im folgenden erläutern, welche Fälle dabei auftreten können.
Ziel der beim Gaußverfahren durchzuführenden Umformungen ist es, die erweiterte Matrix B des Gleichungssystems auf „Dreiecksform" zu bringen. Dabei benutzen wir bei jedem Schritt jeweils den in der sogenannten „Hauptdiagonalen" stehenden Koeffizienten c_{ii}, um alle darunter stehenden Zahlen zu 0 zu machen. Dies ist aber nur möglich, wenn für die betreffende Zahl gilt: $c_{ii} \neq 0$ (für $i=1, 2, \ldots, k$; $k \leq n$ und $k \leq m$). Solange in der betreffenden Zeile oder darunter überhaupt noch von 0 verschiedene Zahlen vorkommen, kann man – falls erforderlich – durch Vertauschen der Zeilen (also der Gleichungen) bzw. durch Vertauschen der Spalten (also der Variablen) stets erreichen, daß diese Bedingung erfüllt ist.

Beispiele:

1) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\ \cdot 3 \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \end{array}\right)$$

Bei diesem Beispiel führt also ein Vertauschen der Zeilen dazu, daß $c_{22} \neq 0$ ist.

2) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 3 & -9 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2\ \cdot(-3) \\ \cdot 1 \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle gilt $c_{22}=0$. Da auch kein weiter unten stehender Koeffizient der zweiten Spalte von 0 verschieden ist, bringt hier nur eine Vertauschung der zweiten und der dritten Spalte an die Stelle von c_{22} eine von 0 verschiedene Zahl:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Diese Vertauschung bedeutet für das Gleichungssystem eine Vertauschung der Variablen y und z, die am Ende der Rechnung wieder rückgängig gemacht werden kann. Zur Bestimmung der Lösungsmenge ist diese Vertauschung nicht unbedingt erforderlich. Es soll nur verdeutlicht werden, daß man stets erreichen kann, daß $c_{ii} \neq 0$ ist, solange ab der i-ten Zeile noch von 0 verschiedene Zahlen in der Matrix vorkommen.

2. Im Endergebnis können – wie die Beispiele zeigen – verschiedene Fälle auftreten.

1. Fall: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

2. Fall: Das Gleichungssystem ist erfüllbar, aber nicht eindeutig lösbar.

3. Fall: Das Gleichungssystem ist unerfüllbar.

Wir wollen allgemein beschreiben, wie die umgeformte Matrix nach Durchführung des Gaußverfahrens am Ende aussehen kann. Dabei ist **teilweise** danach zu unterscheiden, ob die Zahl der Gleichungen (m) gleich, größer oder kleiner ist als die Zahl der Variablen (n), ob also $m=n$, $m>n$ oder $m<n$ ist.

Beachte aber, daß die Unterscheidung nach diesem Gesichtspunkt **nicht in allen drei Fällen** von Bedeutung ist! Im folgenden gilt für die Zahlen c_{ii} stets $c_{ii} \neq 0$ (für $i=1, 2, \ldots, k$ mit $k \leq m$ und $k \leq n$). Die Sterne (*) stehen für beliebige Zahlen.

Zum 1. Fall:

a) Für m = n:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} c_{11} & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & c_{22} & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

b) Für m > n:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & * & * & \ldots & * & * \\ 0 & c_{22} & * & \ldots & * & * \\ 0 & 0 & c_{33} & \ldots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In diesem Fall ist das Gleichungssystem **eindeutig lösbar.** Die zur n-ten Zeile der umgeformten Matrix gehörende Gleichung lautet:

$$c_{nn} \cdot x_n = d_n. \quad \text{Daraus ergibt sich: } x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}.$$

Durch „Rückwärtseinsetzen" lassen sich die Werte aller Variablen eindeutig berechnen.

Dieser 1. Fall kann **nicht** auftreten, wenn $m < n$, die Anzahl der Gleichungen also geringer ist als die Anzahl der Variablen. Es gibt dann nämlich wegen $m < n$ gar keine Zahl c_{nn}. In diesem Fall kann das Gleichungssystem **nicht eindeutig lösbar** sein; denn dazu muß die Anzahl der Gleichungen (m) mindestens gleich der Anzahl der Variablen (n) sein. Es gilt also der Satz:

S 7.1 **Enthält ein lineares Gleichungssystem mehr Variable als Gleichungen, so kann es nicht eindeutig lösbar sein.**

Beachte, daß ein solches Gleichungssystem sehr wohl unerfüllbar sein kann! Wenn es aber erfüllbar ist, dann sind die Lösungen nicht eindeutig bestimmt.

Zum 2. Fall:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
c_{11} & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
0 & c_{22} & \ast & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
0 & 0 & c_{33} & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & c_{kk} & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Sonderfall für $m < n$:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
c_{11} & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
0 & c_{22} & \ast & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
0 & 0 & c_{33} & \ldots & \ast & \ast & \ldots & \ast & \ast \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & c_{kk} & \ast & \ldots & \ast & \ast
\end{array}\right)$$

In diesem Fall gilt $k = m$.

Im links behandelten allgemeinen Fall enthält die umgeformte Matrix ab der $(k+1)$-ten Zeile nur noch vollständige Nullzeilen. Der rechts behandelte **Sonderfall** kann nur auftreten, wenn $m < n$ ist. Die letzte, also die m-te Zeile entspricht der k-ten Zeile; in diesem Sonderfall ist also $k = m$.

In diesem 2. Fall ist das Gleichungssystem zwar **erfüllbar,** aber **nicht eindeutig lösbar.** Meistens können die Werte für die Variablen $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ frei gewählt, also durch einen Parameter erfaßt werden. Die Werte für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sind dann wieder durch „Rückwärtseinsetzen" zu berechnen.

Zu beachten ist allerdings, daß in Sonderfällen die Werte für **einzelne** Variable auch eindeutig bestimmt sein können. Wir gehen auf dieses Problem in Beispiel **2)** unten ein.

Zum 3. Fall:

Der letzte mögliche Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß nach der Umformung der erweiterten Matrix B eine Zeile der Form $0\ 0\ 0 \ldots 0 \mid a$ mit $a \neq 0$ auftritt

Die zugehörige Gleichung $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a$ ist wegen $a \neq 0$ unerfüllbar.

Daher ist auch das Gleichungssystem in jedem solchen Fall **unerfüllbar.**

6. Zur Erläuterung der vorstehenden Ausführungen behandeln wir noch einige **Beispiele.**

1) $\left\{\begin{array}{r} x-2y+z=-1 \\ -2x+y+2z=-5 \\ 3x-y+2z=3 \\ x-3y+8z=-9 \end{array}\right\}; \quad B=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \cdot 2 & \cdot(-3) & \cdot(-1) \\ \cdot 1 & & \\ & \cdot 1 & \\ & & \cdot 1 \end{array}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \cdot(-3) & \cdot 5 \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \\ 0 & 0 & 34 & -34 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :(-17) \\ :(-34) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{lll} & & \cdot 1 \\ & \cdot 1 & \\ \cdot 1 & \cdot 7 & \cdot(-1) \\ \cdot 1 & & \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es liegt also der Fall 1 b) vor. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar. Man erhält: $z=-1$; $y=1$ und daraus $x=2y=2$. Das Lösungstripel ist also $(2|1|-1)$.

2) $\left\{\begin{array}{r} 2x_1+x_2+3x_3-4x_4=3 \\ -3x_1+2x_2-4x_3+6x_4=3 \\ 4x_1-3x_2+5x_3-8x_4=-5 \end{array}\right\}; \quad B=\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 5 & -8 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot 3 & \cdot 2 \\ \cdot 2 & \\ & \cdot(-1) \end{array}$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-5) \\ \cdot 7 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es liegt der Fall 2) vor, und zwar der Sonderfall wegen $k=m=3$ und $n=4$. Das Gleichungssystem ist erfüllbar, aber nicht eindeutig lösbar.

Hinsichtlich der Darstellung der Lösungsmenge mit Hilfe eines Parameters ist bei diesem Beispiel aber Vorsicht geboten; denn durch die dritte Zeile der Endmatrix wird x_3, durch die zweite Zeile dann auch x_2 eindeutig festgelegt; es gilt

$$x_3=1 \quad \text{und} \quad 7x_2+1=15 \Leftrightarrow 7x_2=14 \Leftrightarrow x_2=2.$$

Wir setzen $x_4=t$ und erhalten aus der ersten Zeile:

$$2x_1+2+3-4t=3 \Leftrightarrow 2x_1=-2+4t \Leftrightarrow x_1=-1+2t.$$

Die Lösungsmenge ist darstellbar in der Form

$$L=\{(x_1|x_2|x_3|x_4) \mid x_1=-1+2t \wedge x_2=2 \wedge x_3=1 \wedge x_4=t \wedge t\in\mathbb{R}\}$$

oder in der Form

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel wird deutlich, daß man bei nicht eindeutig lösbaren Gleichungssystemen (Fall 2) nicht immer die Werte **jeder** Variablen frei wählen, also durch einen Parameter erfassen kann, daß vielmehr **einzelne** Variable (nicht alle) auch eindeutig festgelegt sein können.

3) $\left\{\begin{array}{r} x-3y+2z-2w=1\\ -3x+2y-z+2w=-3\\ 3x+5y-4z+2w=5\end{array}\right\}$; $\quad B=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -2 & 1\\ -3 & 2 & -1 & 2 & -3\\ 3 & 5 & -4 & 2 & 5\end{array}\right)\begin{array}{l} \downarrow\cdot 3 \quad |\cdot(-3)\\ \downarrow\cdot 1\\ \quad\ \ \downarrow\cdot 1\end{array}$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -7 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 14 & -10 & 8 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |\cdot 2\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -7 & 5 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right).$$

Es liegt der Fall 3) vor; das Gleichungssystem ist unerfüllbar.

7. Abschließend behandeln wir noch das Gleichungssystem, welches sich im Zusammenhang mit der Herstellung von Edelstahl (V2A) ergeben hat (S. 96).

$$B=\left(\begin{array}{llll|l} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0{,}24 & 0{,}04 & 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}18\\ 0{,}04 & 0{,}12 & 0 & 0{,}16 & 0{,}08\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |\cdot 100\\ |\cdot 100\end{array}\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 24 & 4 & 14 & 14 & 18\\ 4 & 12 & 0 & 16 & 8\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |:2\\ |:4\end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 12 & 2 & 7 & 7 & 9\\ 1 & 3 & 0 & 4 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l} \downarrow\cdot 12 \quad |\cdot(-1)\\ \downarrow\cdot(-1)\\ \qquad\quad \downarrow\cdot 1\end{array}\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 10 & 5 & 5 & 3\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 10 & 5 & 5 & 3\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ |\cdot(-5)\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 10 & -10 & -2\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ |:2\end{array}\to\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5 & -5 & -1\end{array}\right).$$

Es liegt also der Fall 2) vor. Bei diesem Beispiel können wir die Zahlen einer Variablen frei wählen. Wir setzen $\mathbf{x_4=t}$; dann ergibt sich:

a) $5x_3-5t=-1 \Leftrightarrow 5x_3=-1+5t \Leftrightarrow \mathbf{x_3=-0{,}2+t}$;

b) $2x_2=x_3-3x_4+1=-0{,}2+t-3t+1=0{,}8-2t \Leftrightarrow \mathbf{x_2=0{,}4-t}$;

c) $x_1=-x_2-x_3-x_4+1=(-0{,}4+t)+0{,}2-t-t+1 \Leftrightarrow \mathbf{x_1=0{,}8-t}$.

Wir können die Lösung folgendermaßen vektoriell schreiben:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}8\\ 0{,}4\\ -0{,}2\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Zusätzlich ist bei diesem Problem noch die Bedingung $x_k\geq 0$ (für $k=1, 2, 3, 4$) zu erfüllen.

1) $x_1\geq 0$ bedeutet: $0{,}8-t\geq 0 \Rightarrow t\leq 0{,}8$. **2)** $x_2\geq 0$ bedeutet: $0{,}4-t\geq 0 \Rightarrow t\leq 0{,}4$.

3) $x_3\geq 0$ bedeutet: $-0{,}2+t\geq 0 \Rightarrow t\geq 0{,}2$. **4)** $x_4\geq 0$ bedeutet: $t\geq 0$.

Die stärkste Einschränkung nach unten lautet nach Bedingung **3)**: $0{,}2\leq t$;
die stärkste Einschränkung nach oben lautet nach Bedingung **2)**: $t\leq 0{,}4$.
Es muß also zusätzlich gelten: $0{,}2\leq t\leq 0{,}4$.
Nirosta erhält man also z.B., wenn man folgende Anteile der vier Legierungen zusammenschmilzt:

1) für $t=0{,}2$: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 0{,}8-0{,}2\\ 0{,}4-0{,}2\\ -0{,}2+0{,}2\\ 0\ +0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}6\\ 0{,}2\\ 0\\ 0{,}2\end{pmatrix}$; **2)** für $t=0{,}3$: $\vec{x}=\begin{pmatrix} 0{,}8-0{,}3\\ 0{,}4-0{,}3\\ -0{,}2+0{,}3\\ 0\ +0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}5\\ 0{,}1\\ 0{,}1\\ 0{,}3\end{pmatrix}$.

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche, ob die folgenden Gleichungssysteme erfüllbar sind oder nicht! Bestimme ggf. eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge!

a) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z+u=3 \\ x-y-z+u=0 \\ x+2y+2z+u=6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z+u=3 \\ x-y-z+u=0 \\ x-2y+2z+u=-2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z+u=10 \\ -x+2y=3 \\ -2y+3z=5 \\ 3z-4u=-7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-y+z-u=1 \\ 2x+y-2z+3u=10 \\ -x-2y+3z-4u=-9 \\ 3x-z+2u=11 \end{cases}$

2. Untersuche die folgenden Gleichungssysteme auf Lösbarkeit! Ermittle die Lösungsmengen und deute sie bei a), b) und e) geometrisch!

a) $\begin{cases} 6x-3y+2z=-6 \\ -3x+9y+4z=18 \\ 12y+8z=24 \\ 3x-6y+6z=12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ -3x-4y+z=-1 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-3z=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y-z-u=-1 \\ x-y+z+u=3 \\ -3x+3y-3z-3u=-7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y+z-u=3 \\ 2x+y-z+u=9 \\ -x+3y-2z-u=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+3y-z=-1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+y=5 \\ z-u=3 \\ y+z=4 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x-2y-3z+u=4 \\ 2x+y-z+2u=-2 \\ 3x-y-4z+3u=3 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x-2y-2z=2 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+3z=4 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} -2x-y+z=-2 \\ 4x+2y-2z=6 \\ 7y-5z+4w=2 \end{cases}$

3. Die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme sind mit Hilfe von Parametern darstellbar. Ermittle jeweils sämtliche mögliche Darstellungen, bei denen eine oder zwei Variable durch Parameter ersetzt werden!

a) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x-3y+2z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4(-x+2y-z)=5(x+y)+2z-3 \\ 5(x-y+2z)=2-x-3(y-2z) \\ 3(x-y+z)=1-2y+z \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -2x-y+6z=4 \\ -x-5y+3z=-7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4(x-y-z)=-2(4+y+z) \\ 2(x-y+1)=y-2 \\ 3(-x+y+z)=2(2+y+z)-x \end{cases}$

4. Der Zauberkünstler (vergleiche Aufgabe 5, Seite 104) läßt sich von einem Zuschauer von vier gedachten Zahlen die vier Summen von je drei dieser Zahlen zurufen: 7, 8, 10 und 11. Er „rät" unverzüglich die gedachten Zahlen.

a) Ermittle die vier gedachten Zahlen des Zuschauers!

b) Untersuche, mit welchem „Rechentrick" der Zauberkünstler gearbeitet haben könnte!

5.

Legierung / Anteile	Leg. I	Leg. II	Leg. III	Leg. IV
Kupfer	80 %	72 %	70 %	68 %
Blei	15 %	–	30 %	–
Zinn	4 %	–	–	32 %
Zink	1 %	28 %	–	–

Für Lager werden im Maschinenbau häufig wegen der guten Gleiteigenschaften Kupfergußlegierungen aus 75 % Kupfer, 15 % Blei, 6 % Zinn und 4 % Zink verwandt. Untersuche, ob man diese Legierung aus vier anderen zusammenschmelzen könnte, deren Zusammensetzung in der nebenstehenden Tabelle angegeben ist!

6. Schrauben aus einer Kupfer-Zink-Bleilegierung enthalten 60 % Kupfer, 35 % Zink und 5 % Blei.

a) Untersuche, ob diese Legierung aus den vier in der Tabelle angegebenen Legierungen zusammengeschmolzen werden kann!

b) Untersuche, ob und unter welcher Bedingung (jeweils) beim Zusammenschmelzen auf eine der vier in der Tabelle angebotenen Legierungen verzichtet werden kann!

Sorten / Anteile	Legierung I	Legierung II	Legierung III	Legierung IV
Kupfer	75 %	60 %	65 %	50 %
Zink	10 %	40 %	30 %	50 %
Blei	15 %	–	5 %	–

III. Zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

1. Das Problem, n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit zu untersuchen, führt jeweils auf ein Gleichungssystem, bei dem die Absolutglieder sämtlich den Wert 0 haben:

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Beispiel: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Das Gleichungssystem lautet für diesen Fall:

$$\begin{cases} c_1 - 3c_2 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 - 3c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 - 3c_3 = 0. \end{cases}$$

Schon in §6, I (Seite 97) haben wir bemerkt, daß man in solchen Fällen von einem **„homogenen linearen Gleichungssystem“** spricht.

Ein solches Gleichungssystem hat – wie man sofort erkennt – stets die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, kann also nicht unerfüllbar sein.

Die Frage ist also, ob die triviale Lösung die **einzige** Lösung des Systems ist oder ob es **noch andere** Lösungen gibt.

2. Da die letzte Spalte der erweiterten Matrix B eines homogenen Gleichungssystems nur mit der Zahl 0 besetzt ist, haben die Umformungen des Gaußverfahrens auf diese Spalte keinen Einfluß. Zur Vereinfachung untersuchen wir daher bei homogenen Gleichungssystemen nur die Koeffizientenmatrix A.

Beispiele:

1) Wir formen die Matrix A des obigen Beispiels um:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) & |\cdot(-3) \\ \downarrow\cdot 1 & | \\ & \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:3 \\ \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-10) \\ \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es liegt Fall 1) vor; das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, besitzt also **nur** die triviale Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Die drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind also linear unabhängig.

2) $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Wir formen die Matrix A des zugehörigen homogenen Gleichungssystems um:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) & |\cdot(-3) \\ \downarrow\cdot 1 & | \\ & \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |:3 \\ |:10 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es liegt Fall 2) vor; das Gleichungssystem besitzt auch nichttriviale Lösungen. Wir setzen z.B. $c_3 = t$; dann gilt:

$$c_2 = c_3 = t \quad \text{und} \quad c_1 = 3c_2 - 2c_3 = 3t - 2t = t.$$

Eine nichttriviale Lösung ist also z.B. $c_1 = c_2 = c_3 = 1$. Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind also linear abhängig.

3) $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Wir formen die zugehörige Matrix A um:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 4 & 9 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot 2 & |\cdot(-4) & |\cdot 1 \\ \downarrow\cdot 1 & | & | \\ & \downarrow\cdot 1 & | \\ & & \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot 1 & |\cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 & | \\ & \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es liegt Fall 2) vor. Dies bedeutet, daß die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear abhängig sind.

Bei der Bestimmung der Lösungsmenge des Gleichungssystems müssen wir auch bei diesem Beispiel vorsichtig sein; denn durch die zweite Zeile der letzten Matrix ist **eindeutig** festgelegt: $c_2 = 0$. Wir setzen $c_1 = t$; dann gilt auch $c_3 = t$. Man kann die drei Lösungen c_1, c_2, c_3 zu einem „Lösungsvektor" zusammenfassen: $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Zahl 0 an der zweiten Stelle des Lösungsvektors $\vec{c}$ zeigt, daß der Vektor $\vec{a}_2$ **keinen Beitrag** zu einer möglichen Linearkombination des Nullvektors durch die drei Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ leistet. Dies bedeutet, daß bei diesem Beispiel **nicht** etwa jeder der drei Vektoren aus den beiden anderen erzeugt werden kann. Vielmehr ist der Vektor $\vec{a}_3$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}_1$ (und natürlich auch umgekehrt), während der Vektor $\vec{a}_2$ von den beiden anderen linear unabhängig ist.
Die Lösungsmenge (bzw. der Lösungsvektor) zeigt also nicht nur, **daß** zwischen den drei Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ lineare Abhängigkeit besteht; sie gibt vielmehr darüber hinaus auch Aufschluß über die **Art der Abhängigkeit** zwischen diesen Vektoren.

3. In §4 haben wir geometrisch begründet, daß drei ebene Vektoren und daß vier räumliche Vektoren stets voneinander linear abhängig sind.
Allgemein gilt, daß $n+1$ Vektoren mit jeweils n Koordinaten stets linear abhängig sind. Wir können diesen Sachverhalt jetzt auch arithmetisch beweisen.

S7.2 **$n+1$ Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ mit jeweils n Koordinaten sind stets linear abhängig.**

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß das homogene Gleichungssystem

$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n + c_{n+1}\vec{a}_{n+1} = \vec{0}$ nicht nur die triviale Lösung hat.

Es handelt sich um ein System von n Gleichungen mit $n+1$ Variablen.
Dieses Gleichungssystem ist wegen $n+1>n$ nach Satz S7.1 **nicht** eindeutig lösbar. Die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c_{n+1} = 0$ kann also nicht die einzige Lösung des Systems sein. Daher hat das System auch nichttriviale Lösungen; die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ sind also auf jeden Fall linear abhängig, q.e.d.

Übungen und Aufgaben

1. Bestätige, daß die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind

a) mit Hilfe einer speziellen Lösung des Gleichungssystems $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$;
b) durch Anwenden des Gaußverfahrens auf die zugehörige Koeffizientenmatrix A!

2. Untersuche, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind! Ermittle die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems!

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Bestätige die Gültigkeit von Satz S 7.2 für die folgenden fünf Vektoren!

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wende das Gaußverfahren auf die zugehörige Matrix A an und ermittle auch eine spezielle Lösung des betreffenden Gleichungssystems!

4. Untersuche die folgenden Vektoren auf lineare Abhängigkeit! Kann man eine Aussage über die **Art** der Abhängigkeit der Vektoren machen? (Vergleiche Seite 122!)

a) $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}2\\4\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\3\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\6\\3\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\5\end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\0\\-1\end{pmatrix}$ **j)** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

IV. Zur Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen

1. Wir kommen nun zurück auf die Untersuchung der Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen, die wir in § 5, III unterbrochen hatten.
Zwei Geraden seien gegeben durch die Paremetergleichungen

$$g_1\colon \vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a} \quad \text{und} \quad g_2\colon \vec{x}=\vec{x}_2+s\vec{b}.$$

Wenn die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nichtkollinear sind — was man meistens leicht erkennen kann — sind die Geraden windschief oder sie schneiden sich. Um zu prüfen, ob die Geraden sich schneiden, untersuchen wir das Gleichungssystem

$$\vec{x}_1+r\vec{a}=\vec{x}_2+s\vec{b}, \quad \text{also } r\vec{a}-s\vec{b}=\vec{x}_2-\vec{x}_1.$$

Bemerkung: Wir schreiben die erweiterte Matrix B dieses Gleichungssystems kurz in der Form:

$$B=(\vec{a};\ -\vec{b}\,|\,\vec{x}_2-\vec{x}_1).$$

Beispiele:

1) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear. Wir prüfen also, ob die Geraden sich schneiden oder windschief sind. Es gilt:

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir formen die Matrix $B = (\vec{a}; -\vec{b} \,|\, \vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ des Gleichungssystems um:

$$B = \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \quad\;\; \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ :(-7) \\ :2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \quad\;\; \cdot 1 \\ \cdot 1 \quad \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Aus den beiden ersten Zeilen der Ergebnismatrix erhält man: $r = 1 \wedge s = 1$.
Da die letzte Zeile nur mit der Zahl 0 besetzt ist, ändert sie an diesen Lösungen nichts. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist also gegeben durch den Ortsvektor

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{Probe: } \vec{x}_S = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Auch bei diesem Beispiel sind die beiden Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ nicht kollinear. Es gilt:

$$\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$B = (\vec{a}; -\vec{b} \,|\, \vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \cdot 2 \\ \cdot 1 \\ \quad\;\; \cdot 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ :(-3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 7 \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist; die beiden Geraden g_1 und g_2 sind also windschief.

2. Eine Ebene ε und eine Gerade g seien durch ihre Parametergleichungen gegeben:

$$\varepsilon:\ \vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b} \quad \text{und} \quad g:\ \vec{x}=\vec{x}_1+t\vec{c}.$$

Für die Parameterwerte eines etwaigen Schnittpunkts muß gelten:

$$\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}=\vec{x}_1+t\vec{c}; \quad \text{also } r\vec{a}+s\vec{b}-t\vec{c}=\vec{x}_1-\vec{x}_0.$$

Wir haben also die Matrix $B=(\vec{a};\vec{b};-\vec{c}\,|\,\vec{x}_1-\vec{x}_0)$ zu untersuchen.

Beispiele:

1) ε: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. Es ist $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}5\\-4\\1\end{pmatrix}$.

Wir formen die Matrix B um:

$$B=\left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&5\\-2&-1&1&-4\\-1&2&-3&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\downarrow\cdot 2\ \ \cdot 1\\ \cdot 1\\ \downarrow\cdot 1\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&5\\0&-1&-1&6\\0&2&-4&6\end{array}\right) \ |:2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&5\\0&-1&-1&6\\0&1&-2&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 1\\ \downarrow\cdot 1\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&5\\0&-1&-1&6\\0&0&-3&9\end{array}\right) \ |:3 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&0&-1&5\\0&-1&-1&6\\0&0&-1&3\end{array}\right).$$

Die Umformung ergibt, daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Dies bedeutet geometrisch, daß die Ebene und die Gerade sich in genau einem Punkt schneiden. Wir ermitteln die Parameterwerte des Schnittpunktes. Nach der dritten Zeile in der letzten Matrix gilt: $t=-3$. Durch Einsetzen in die Geradengleichung erhält man für den Ortsvektor des Schnitt punktes S:

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3\\-3+3\\2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}.$$

An der Ebenengleichung kann man eine **Probe** durchführen. Dazu ermitteln wir die Werte für die Parameter r und s. Aus der zweiten Zeile der letzten Matrix erhält man: $-s-t=6 \Leftrightarrow s=-6-t=-6+3=-3$ und schließlich aus der ersten Zeile dieser Matrix: $r-t=5 \Leftrightarrow r=5+t=5-3=2$. Wir setzen diese Zahlen in die Ebenengleichung ein:

$$\vec{x}_S=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+2-0\\1-4+3\\1-2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}.$$

2) ε: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}$. Es ist $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Wir formen wiederum die Matrix B um:

$$B=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&-1\\-2&1&4&1\\1&2&-7&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\downarrow\cdot 2\ \ \cdot(-1)\\ \cdot 1\\ \cdot 1\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&-1\\0&-3&6&-1\\0&4&-8&1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 4\\ \downarrow\cdot 3\end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&-1\\0&-3&6&-1\\0&0&0&-1\end{array}\right).$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist. Dies bedeutet, daß die Gerade und die Ebene parallel zueinander sind.

3) $\varepsilon\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\ \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix};\quad g\colon \vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}.$

Gegenüber dem vorigen Beispiel ist nur der Vektor $\vec{x}_0$ geändert. Es ist: $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$.
Wir formen die Matrix B um:

$$B=\left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&1\\-2&1&4&1\\1&2&-7&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 2 \quad \cdot(-1)\\ \downarrow\cdot 1\\ \quad\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&1\\0&-3&6&3\\0&4&-8&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ :(-3)\\ :\ 4\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&1\\0&1&-2&-1\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-1)\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}1&-2&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Da die letzte Zeile nur mit der Zahl 0 besetzt ist, ist das Gleichungssystem erfüllbar, aber nicht eindeutig lösbar. Die Werte einer Variablen können frei gewählt, also durch einen Parameter erfaßt werden. Die Lösungsmenge stellt also eine Gerade dar. Dies bedeutet, daß die Gerade g in der Ebene ε liegt.

3. Zwei Ebenen seien gegeben durch ihre Parametergleichungen:

$$\varepsilon_1\colon \vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a}_1+s\vec{b}_1 \quad\text{und}\quad \varepsilon_2\colon \vec{x}=x_2+t\vec{a}_2+v\vec{b}_2.$$

Die Koordinaten der Punkte einer etwaigen Schnittgeraden müssen der folgenden Gleichung genügen:

$$\vec{x}_1+r\vec{a}_1+s\vec{b}_1=\vec{x}_2+t\vec{a}_2+v\vec{b}_2, \quad\text{also}\quad r\vec{a}_1+s\vec{b}_1-t\vec{a}_2-v\vec{b}_2=\vec{x}_2-\vec{x}_1.$$

Wir haben also die Matrix $B=(\vec{a}_1;\vec{b}_1;\ -\vec{a}_2;\ -\vec{b}_2|\vec{x}_2-\vec{x}_1)$ zu untersuchen.

Beispiele:

1) $\varepsilon_1\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\quad \varepsilon_2\colon \vec{x}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix};\ \vec{b}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}.$

Es ist $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}.$

$$B=\left(\begin{array}{rrrr|r}2&1&-1&1&1\\-1&-2&0&-1&3\\1&1&2&0&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 1 \quad \cdot 1\\ \downarrow\cdot 2\\ \quad\ \downarrow\cdot(-2)\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}2&1&-1&1&1\\0&-3&-1&-1&7\\0&-1&-5&1&9\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 1\\ \downarrow\cdot(-3)\end{array}$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}2&1&-1&1&1\\0&-3&-1&-1&7\\0&0&14&-4&-20\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot(-1)\\ :2\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}2&1&-1&1&1\\0&3&1&1&-7\\0&0&7&-2&-10\end{array}\right).$$

An der letzten Zeile erkennt man, daß das Gleichungssystem erfüllbar ist. Nach Satz S 7.1 kann es aber nicht eindeutig lösbar sein.
Aus der dritten Zeile der letzten Matrix ergibt sich für die Parameter t und v:

$$7t-2v=-10 \Leftrightarrow v=5+\tfrac{7}{2}t.$$

Wir setzen dies in die Parametergleichung der Ebene ε_2 ein:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+(5+\tfrac{7}{2}t)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1-\frac{7}{2}\\0+\frac{7}{2}\\-2+0\end{pmatrix}\Rightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}+\frac{t}{2}\begin{pmatrix}-5\\7\\-4\end{pmatrix}.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden, der Schnittgeraden der beiden Ebenen in Parameterform.

Bemerkung: Man kann den Nenner 2 beim Parameter t auch weglassen, weil mit $\vec{a}$ stets auch $2\vec{a}$ ein Richtungsvektor der Geraden ist. Wir können also auch schreiben:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\7\\-4\end{pmatrix}.$$

Überlege, wie man eine Gleichung für die Schnittgerade aus der Gleichung für die Ebene ε_1 gewinnen kann (Aufgabe 8)!

2) $\varepsilon_1\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix};\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix};\ \vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix};\qquad \varepsilon_2\colon \vec{x}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix};\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$

Es ist: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-4\end{pmatrix}$. Wir formen wiederum die Matrix B um:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&4\\0&-1&1&1&-3\\-2&3&-1&-5&-4\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 2\\ \\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&4\\0&-1&1&1&-3\\0&7&-7&-7&4\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 7\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&4\\0&-1&1&1&-3\\0&0&0&0&-17\end{array}\right).$$

An der letzten Zeile erkennt man, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist. Dies bedeutet, daß die beiden Ebenen zueinander parallel, aber nicht identisch sind.

3) Ändern wir im letzten Beispiel nur $\vec{x}_2$ ab in

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-5\\4\\-4\end{pmatrix},\ \text{so ergibt sich:}\ \vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-5\\4\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-6\end{pmatrix}.$$

Wir formen wiederum die Matrix B um:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&-4\\0&-1&1&1&2\\-2&3&-1&-5&-6\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot 2\\ \\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&-4\\0&-1&1&1&2\\0&7&-7&-7&-14\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \cdot 7\\ \downarrow\cdot 1\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{rrrr|r}1&2&-3&-1&-4\\0&-1&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Man erkennt, daß das Gleichungssystem erfüllbar, aber natürlich nicht eindeutig lösbar ist. Da die zweite Zeile noch drei von 0 verschiedenen Zahlen enthält, können die Werte von zwei Variablen frei gewählt, also durch einen Parameter erfaßt werden. Die Lösungsmenge stellt also eine Ebene dar. Dies bedeutet, daß die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 identisch sind.

Übungen und Aufgaben

1. Bestätige, daß von den folgenden drei Geraden g_1, g_2 und g_3 jeweils zwei zueinander parallel und zwei windschief sind und daß zwei sich schneiden! Ermittle ggf. den Schnittpunkt!

a) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$, g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$

b) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2. Ermittle die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2!

a) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

b) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$

c) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$

d) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

e) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-4\\7\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$

f) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

3. Lassen sich für die Geraden g_1 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\a\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\b\\1\end{pmatrix}$ und g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\2\\c\end{pmatrix}$ Werte für die Variablen a, b und c so bestimmen, daß

a) g_1 parallel g_2 ist, **b)** g_1 windschief zu g_2 ist, **c)** beide sich schneiden?

4. Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden und der Ebene! Ermittle ggf. das Schnittgebilde!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\6\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

f) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

g) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-9\\-4\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}$

h) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

i) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\2\\8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}$

5. Untersuche, ob die durch die beiden Punkte P(6|0|2) und Q(12|0|6) bestimmte Gerade die Fläche des Dreiecks trifft, das durch die drei Eckpunkte A(8|4|12), B(6|4|10) und C(6|8|20) bestimmt ist!

6. a) Ermittle die Schnittgerade der beiden Ebenen ε_1 und ε_2!

$$\varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$$

b) Bestätige, daß die Ebenen ε_1 und ε_2 parallel sind! Prüfe, ob sie identisch sind!

$$\varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\2\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

7. Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Ebenen! Ermittle ggf. das Schnittgebilde!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\1\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\-1\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}14\\-2\\1\end{pmatrix}$

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-2\\8\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\8\\-6\end{pmatrix}$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\1\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\-8\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}6\\-1\\2\end{pmatrix}$

f) $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

8. Ermittle bei Beispiel 1) von Seite 127 die Gleichung der Schnittgeraden aus der Gleichung für die Ebene ε_1!

§ 8 Das Skalarprodukt von Vektoren

I. Die geometrische Definition des Skalarproduktes

1. Für Vektoren haben wir bisher zwei Verknüpfungen definiert:

1) die **Vektoraddition;** dabei wird jedem Paar von Vektoren ein Vektor zugeordnet; die Verknüpfung ist also von der Form $V \times V \to V$;

2) die **S-Multiplikation;** dabei wird jedem Paar, das aus einer Zahl und einem Vektor besteht, ein Vektor zugeordnet; die Verknüpfung ist also von der Form $\mathbb{R} \times V \to V$.

Nun gibt es aber viele geometrische Fragestellungen, z.B. Abstandsaufgaben und Aufgaben zu Winkelgrößen, die wir mit den uns bisher zur Verfügung stehenden Mitteln nicht (oder nur mit verhältnismäßig großem Rechenaufwand) angehen können. Aus diesen Gründen wollen wir eine neue Verknüpfung nämlich eine **„Multiplikation“** von Vektoren einführen, mit deren Hilfe u.a. Längen und Winkelgrößen erfaßt werden können.

2. Zur Definition einer Multiplikation von Vektoren gibt es grundsätzlich zwei einfache Möglichkeiten:

1) das Ergebnis kann eine **Zahl** sein; dann ist die Verknüpfung von der Form $V \times V \to \mathbb{R}$;

2) das Ergebnis kann ein **Vektor** sein; dann ist die Verknüpfung von der Form $V \times V \to V$.

Mit der zweiten Möglichkeit werden wir uns in §10 befassen. In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit der ersten Möglichkeit. Da sich als Ergebnis eine Zahl, also ein **Skalar** ergeben soll, nennt man dieses Produkt **„Skalarprodukt von Vektoren“.** Wir bezeichnen dieses Produkt mit

„$\vec{a} \cdot \vec{b}$“, gelesen „Vektor a mal Vektor b“. [1])

3. Zur Motivation der Definition des Skalarproduktes von Vektoren greifen wir auf den physikalischen Begriff der „Arbeit“ zurück. Bewegt sich ein Körper unter dem Einfluß einer konstanten Kraft $\vec{F}$ in Richtung der Kraft um ein Wegstück $\vec{s}$, so sagt man, daß die Kraft am Körper eine „Arbeit“ verrichtet. Als Maß für diese Arbeit definiert man in diesem einfachsten Fall das Produkt

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|.$$

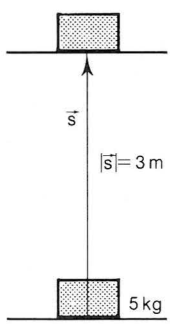


Bild 8.1

---

[1]) Es sind auch die Sprechweisen „Vektor a **in** Vektor b“ und „Vektor a **Punkt** Vektor b“ gebräuchlich.

Beispiel: Ein Körper von 5 kg Masse wird um 3 m senkrecht nach oben gehoben (Bild 8.1, S. 130). Wie groß ist die dabei zu verrichtende physikalische Arbeit, die sogenannte Hubarbeit?

Lösung: Beim Heben eines Körpers ist eine Kraft $\vec{F}$ aufzubringen, die dem Gewicht des Körpers (also der von der Erde auf den Körper ausgeübten Gravitationskraft) das Gleichgewicht hält.
Für das Gewicht eines Körpers der Masse m gilt:

$$|\vec{F}_g| = m\,g.$$

Dabei bezeichnet g die sogenannte „Erdbeschleunigung“: $g = 9{,}81\,\frac{m}{sec^2}$.
Somit gilt für die aufzubringende Hubarbeit bei unserem Beispiel:

$$W = |\vec{F}_g|\,|\vec{s}| = 5\,kg \cdot 9{,}81\,\frac{m}{sec^2} \cdot 3\,m = 147\,\frac{kg \cdot m^2}{sec^2} \approx 147\,Nm.$$

4. In vielen Fällen stimmen aber Kraft- und Wegrichtung **nicht** miteinander überein.

Beispiele:

1) Ein Kind zieht mit Hilfe einer Kordel einen Schlitten (Bild 8.2).

2) Ein Traktor zieht schräg an einem Waggon, der auf einem Gleis parallel zur Straße läuft (Bild 8.3).

3) Ein Boot wird vom Land aus durch eine Schleuse gezogen (Bild 8.4).

Bild 8.2

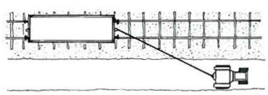


Bild 8.3

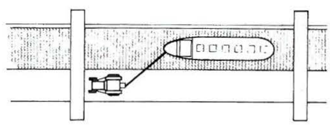


Bild 8.4

In solchen Fällen wirkt sich für die Bewegung nur der Anteil der Kraft $\vec{F}$ aus, der in der Wegrichtung, also in Richtung von $\vec{s}$ liegt; wir bezeichnen diesen Anteil mit $\vec{F}_s$ (Bild 8.5).
Schließen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ einen Winkel der Größe α ein, so gilt in diesem Falle für die Arbeit, die die Kraft $\vec{F}$ längs des Weges $\vec{s}$ verrichtet, wegen $|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cos\alpha$:

$$W = |\vec{F}_s|\,|\vec{s}| = |\vec{F}|\,|\vec{s}| \cos\alpha.$$

Dieses Produkt $|\vec{F}|\,|\vec{s}| \cos\alpha$ definiert man als das Skalarprodukt von $\vec{F}$ und $\vec{s}$; man schreibt:

$$\boldsymbol{\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}|\,|\vec{s}| \cos\alpha.}$$

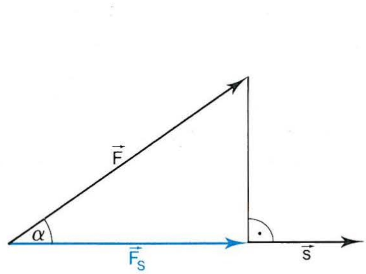


Bild 8.5

5. Wir übertragen das Produkt, das sich für den Fall der physikalischen Arbeit ergeben hat, auf beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und definieren:

D 8.1 **Unter dem „Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$" versteht man das Produkt**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha.$$

Dabei bezeichnet α die Größe des (nicht überstumpfen) Winkels, den zwei an einem Punkt angetragene Repräsentanten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen.

Beachte:

1) Für $\vec{a}=0 \vee \vec{b}=0$ gilt $|\vec{a}|=0 \vee |\vec{b}|=0$, also $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

2) für Winkel mit $0 \leq \alpha < 90°$ gilt $\cos\alpha > 0$, also $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ (für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$);

3) für Winkel mit $90° < \alpha \leq 180°$ gilt $\cos\alpha < 0$, also $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ (für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$).

Wir betrachten im folgenden die Sonderfälle für $\alpha=0°$, $\alpha=180°$ und $\alpha=90°$.

6. Für $\alpha=0°$ gilt wegen $\cos 0°=1$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot 1=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$. Es gilt $\vec{b}=2\vec{a}$, also $\alpha=0°$.

Es ist $|\vec{a}|=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$ und $|\vec{b}|=\sqrt{16+4+64}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$.
Also gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{21}\cdot 2\cdot\sqrt{21}=2\cdot 21=42$.
Insbesondere gilt für $\vec{b}=\vec{a}$: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\,|\vec{a}|=|\vec{a}|^2$ und wegen $|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$:

$$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2.}$$

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a}\cdot\vec{a}=1^2+(-3)^2+4^2=1+9+16=26$.

Für die Länge eines Vektors $\vec{a}$ gilt demnach:

$$\boldsymbol{|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.}$$

Daraus ergibt sich ferner, daß für jeden Vektor $\vec{a}\neq\vec{0}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$.

7. Für $\alpha=180°$ gilt wegen $\cos 180°=-1$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|(-1)=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Es gilt $\vec{b}=-2\vec{a}$, also $\alpha=180°$.

Aus $|\vec{a}|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$ und $|\vec{b}|=\sqrt{36+4+16}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$ ergibt sich:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\sqrt{14}\cdot 2\sqrt{14}=-2\cdot 14=-28.$$

Wir fassen die Ergebnisse von 6. und 7. zusammen im Satz

S 8.1 **1) Für zwei kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:**

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, **falls** $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ **und** **b)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\,|\vec{b}|$, **falls** $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ **ist.**

2) Für jeden Vektor $\vec{a}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, **also** $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

3) Ferner gilt: $\vec{a}\neq\vec{0} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}>0$.

Bemerkung: Statt „$\vec{a} \cdot \vec{a}$“ schreibt man gelegentlich auch „$\vec{a}^2$“. Dann gilt: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Wir werden von dieser Schreibweise vor allem in §12 Gebrauch machen.

8. Für $\alpha = 90°$ gilt wegen $\cos 90° = 0$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 90° = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, deren Vertreter aufeinander senkrecht stehen, hat also den Wert 0.

Wir sagen der Einfachheit halber, daß auch die Vektoren selbst senkrecht, orthogonal zueinander sind.

Die Beziehung $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist für die Orthogonalität von Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sogar kennzeichnend. Denn aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\alpha = 0$ folgt, wenn $|\vec{a}| \neq 0$ und $|\vec{b}| \neq 0$ ist: $\cos\alpha = 0$; und das bedeutet, da für α nur nicht überstumpfe Winkel zugelassen sind: $\alpha = 90°$, q.e.d.

Es gilt also der Satz

S 8.2 **Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ sind zueinander orthogonal genau dann, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.**

Beachte: Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann also auch dann den Wert 0 haben, wenn beide Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom Nullvektor verschieden sind. Eine vergleichbare Eigenschaft gibt es für Zahlen nicht; denn für beliebige reelle Zahlen a und b gilt:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0.$$

Dagegen gilt für Vektoren der Satz

S 8.3 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}.$

Der **Beweis** soll in Aufgabe 8a geführt werden.

9. Aus den betrachteten Sonderfällen kollinearer Vektoren können wir eine allgemeine geometrische Deutung des Skalarproduktes herleiten.

1) Schließen die beiden Vektoren einen **spitzen Winkel** ein ($0 < \alpha < 90°$), so ist $|\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ die Länge der Projektion des Vektors $\vec{b}$ in die Richtung von $\vec{a}$ (Bild 8.6).

2) Schließen die beiden Vektoren einen **stumpfen Winkel** ein ($90° < \alpha < 180°$), so wird die Länge dieser Projektion wegen $\cos\alpha < 0$ erfaßt durch $|\vec{b}|\,|\cos\alpha|$ (Bild 8.7).

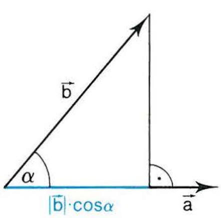


Bild 8.6

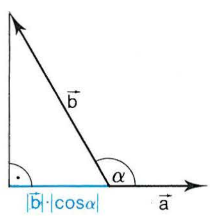


Bild 8.7

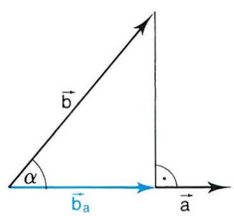


Bild 8.8

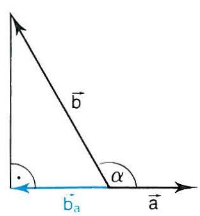


Bild 8.9

3) Auch der Sonderfall des **rechten Winkels** ($\alpha=90°$ und $\cos\alpha=0$) wird von $|\vec{b}|\,|\cos\alpha|$ richtig erfaßt, weil die Projektion dann auf einen Punkt zusammenschrumpft. Unabhängig von der Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definieren wir allgemein den Begriff des **„Projektionsvektors $\vec{b}_a$"**:

D 8.2 **Unter dem „Projektionsvektor $\vec{b}_a$" verstehen wir den Vektor, dessen Vertreter man durch senkrechte Projektion eines Vertreters von $\vec{b}$ in die Richtung eines Vertreters von $\vec{a}$ erhält.**

Wir haben dabei drei Fälle zu unterscheiden:

1) Gilt $0\leq\alpha<90°$, so ist $\vec{b}_a\uparrow\uparrow\vec{a}$ (Bild 8.8);

2) Gilt $90°<\alpha\leq180°$, so ist $\vec{b}_a\uparrow\downarrow\vec{a}$ (Bild 8.9).

3) Gilt $\alpha=90°$, so ist $\vec{b}_a=\vec{0}$.

Wir können das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ nun auch mit Hilfe des Projektionsvektors $\vec{b}_a$ ausdrücken.
Es gilt der Satz:

S 8.4 **Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}_a$.**

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß die beiden Produkte $\vec{a}\cdot\vec{b}$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}_a$ sowohl dem Betrage wie dem Vorzeichen nach übereinstimmen.

1) In jedem Fall gilt:

$$|\vec{b}_a|=|\vec{b}|\,|\cos\alpha|, \quad \text{also:} \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos\alpha|=|\vec{a}|\,|\vec{b}_a|=|\vec{a}\cdot\vec{b}_a|.$$

2) Gilt $0\leq\alpha<90°$, so ist $\cos\alpha\geq0$, also auch $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq0$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}_a\geq0$.
Gilt $90°\leq\alpha\leq180°$, so ist $\cos\alpha\leq0$, also auch $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq0$ und $\vec{a}\cdot\vec{b}_a\leq0$.
In jedem Falle gilt also $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}_a$, q.e.d.

10. Die Zahl $|\vec{a}\cdot\vec{b}_a|=|\vec{a}|\,|\vec{b}_a|$ kann man nun interpretieren als die Maßzahl A eines Rechteckes mit den Seitenmaßzahlen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}_a|$ (Bilder 8.10 und 8.11).
Der Beweis soll in Aufgabe 8b geführt werden.

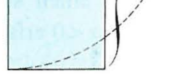


Bild 8.10

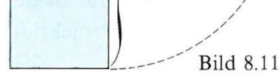


Bild 8.11

Es gilt der Satz:

S 8.5 **Für die Maßzahl A eines Rechteckes mit den Seitenmaßzahlen $|\vec{a}|$ und $|\vec{b}_a|$ gilt:**

1) $A=\vec{a}\cdot\vec{b}$, falls $0°\leq\alpha\leq90°$, und

2) $A=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$, falls $90°<\alpha\leq180°$ ist.

Übungen und Aufgaben

1. Bei einem Skilift bilden die Richtung des Schleppseils und die Hangrichtung einen Winkel der Größe α (Bild 8.12). Der gesamte Hang, längs dem eine Skiläuferin hochgeschleppt wird, ist 850 m lang. Auf dem ersten Teil, der 550 m lang ist und auf dem $\alpha_1 = 35°$ gilt, wird am Haltebügel die Kraft $|\vec{F}_1| = 40$ N gemessen und auf dem etwas steileren oberen Hangteil von 300 m Länge unter $\alpha_2 = 30°$ die Kraft $|\vec{F}_2| = 55$ N. Welche Arbeit verrichtet der Lift an der Skiläuferin insgesamt?

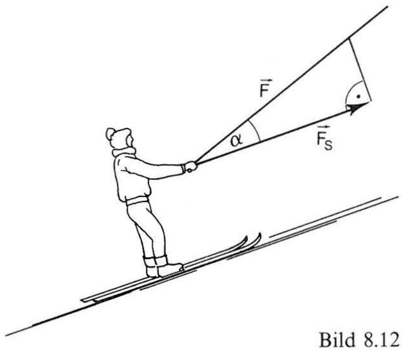


Bild 8.12

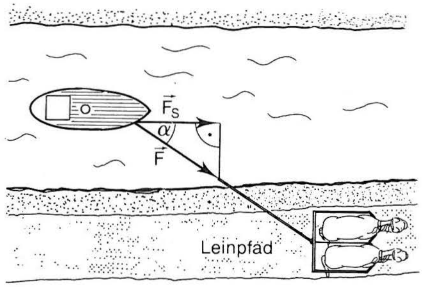


Bild 8.13

2. Bei Windflaute wurden stromaufwärts fahrende Schiffe früher oft an langen Seilen vom Ufer aus von Menschen oder von Tieren geschleppt (Bild 8.13). Bei diesem „Treideln" bringt z.B. ein Pferdegespann längs eines geradlinigen Leinpfades (Treidelpfades) von 2400 m Länge ständig eine Kraft von $|\vec{F}| = 420$ N auf. Zugrichtung am Seil und Flußrichtung bilden einen Winkel der Größe $\alpha = 22{,}5°$. Welche Arbeit wird am Schiff verrichtet?

3. In einer 650 m langen Linkskurve, in der ständig Flußrichtung und Wegrichtung parallel zueinander sind, verringert sich zwar die Größe des Winkels zwischen Zugrichtung am Seil und Flußrichtung auf $\alpha = 16°$; andererseits muß das Pferdegespann seine Zugkraft auf $|\vec{F}| = 510$ N erhöhen, weil am außenliegenden Ufer die Strömung stärker ist. Welche Arbeit wird am Schiff verrichtet? Ist sie, auf 100 m Flußlänge bezogen, in der Kurve größer als auf dem geraden Flußufer (vgl. Aufgabe 2)?

4. Eine Kraft $\vec{F}$ leiste längs eines Weges $\vec{s}$ die Arbeit W; der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ habe die Größe α. Bestimme aus den gegebenen Stücken die fehlende Angabe!
a) $|\vec{F}| = 180$ N; $|\vec{s}| = 6$ m; $W = 540$ Nm **b)** $|\vec{F}| = 2520$ N; $\alpha = -120°$; $W = -36800$ Nm.

5. In einer rheinischen Braunkohlengrube wird die abgebaute Braunkohle aus einer Tiefe von bis zu 300 m durch Förderbänder in ein Kraftwerk transportiert. Ein geradliniges Teilstück von 1050 m Länge führt an einem Hang mit einem Steigungswinkel von $\alpha = 15°$ nach oben. Welche Arbeit wird hier an jeder Tonne (1 t) geförderter Braunkohle geleistet?

6. Berechne jeweils $|\vec{b}|$!
a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -24 \cdot \sqrt{2}$; $|\vec{a}| = 6$; $\alpha = 135°$ **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 120$; $|\vec{a}| = 12$; $\alpha = 60°$

7. Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind die folgenden Größen gegeben. Berechne jeweils die Größe α des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$!

a) $|\vec{a}|^2=36$; $|\vec{b}|^2=81$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=27$ **b)** $|\vec{a}|=4{,}5$; $\vec{b}\cdot\vec{b}=30{,}25$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

c) $|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=100$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=50\cdot\sqrt{2}$ **d)** $|\vec{a}|=10$; $|\vec{b}|=14{,}5$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=-72{,}5$

8. Beweise **a)** Satz S 8.3; **b)** Satz S 8.5!

9. **a)** Beweise, daß für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ **(Ungleichung von Cauchy-Schwartz)!**

b) Unter welcher Bedingung gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$ bzw. $\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{a}|\,|\vec{b}|$?

10. Beweise die Ungleichung von Cauchy-Schwartz (vgl. Aufgabe 9) mit Hilfe der Deutung des Skalarproduktes durch die Flächenmaßzahl eines Rechtecks nach Satz S 8.5!

11. Begründe (anschaulich), daß drei voneinander und von $\vec{o}$ verschiedene Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, wenn für sie gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$!

12. Beweise die folgenden beiden Sätze!

a) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|<|\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

II. Die Koordinatendarstellung und die Gesetze des Skalarproduktes

1. Um mit dem Skalarprodukt einfach rechnen zu können, müssen wir versuchen, es durch die Koordinaten der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auszudrücken. Das Problem dabei ist, wie wir den in der Definition D 8.1 vorkommenden Faktor $\cos\alpha$ durch die Koordinaten der beiden Vektoren ausdrücken können.

Wir erinnern uns daran, daß der Kosinus eines Winkels im **Kosinussatz der Trigonometrie** vorkommt. Daher liegt es nahe, diesen Satz auf das Dreieck anzuwenden, welches von zwei Vertretern der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird, die an einem Punkt angetragen sind (Bild 8.14). Die dritte Dreiecksseite kann dann erfaßt werden durch den Vektor $\vec{a}-\vec{b}$.

Wir drücken die Länge dieses Vektors, also $|\vec{a}-\vec{b}|$ aus

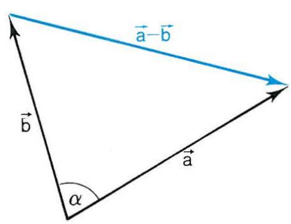


Bild 8.14

1) mit Hilfe des Kosinussatzes und

2) durch die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Um Quadratwurzeln zu vermeiden, berechnen wir in beiden Fällen nicht $|\vec{a}-\vec{b}|$, sondern $|\vec{a}-\vec{b}|^2$.

1) $$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

2) Es ist $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$. Mithin gilt:

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2\\&=(a_1{}^2-2a_1b_1+b_1{}^2)+(a_2{}^2-2a_2b_2+b_2{}^2)+(a_3{}^2-2a_3b_3+b_3{}^2)\\&=(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)+(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=\quad|\vec{a}|^2\quad+\quad|\vec{b}|^2\quad-2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3).\end{aligned}$$

Durch Vergleich der beiden Darstellungen von $|\vec{a}-\vec{b}|^2$ ergibt sich unmittelbar:

$$\mathbf{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.}$$

Den Fall, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **ebene** Vektoren sind, können wir erfassen durch die Bedingung $a_3=b_3=0$. Dann gilt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Damit haben wir gefunden:

S8.6 **Für beliebige Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in V_3$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.**

Bemerkung: Als Sonderfall enthält Satz S8.6 im Zusammenhang mit Satz S8.1 die Gleichung:

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}.$$

Diese Formel ist uns seit langem vertraut und bei der Herleitung der allgemeinen Formel von Satz S8.6 auch benutzt worden.

Beispiele:

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-4)+4\cdot1=14$

2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-4\\5\end{pmatrix}$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\cdot2+1\cdot(-4)+2\cdot5=0$

Das Ergebnis zeigt, daß die Vektoren des zweiten Beispiels aufeinander senkrecht stehen.

2. Zu einem **ebenen** Vektor $\vec{a}$ kann man mit Hilfe des Skalarproduktes in sehr einfacher Weise einen ebenen Vektor $\vec{b}$ bestimmen, der zu $\vec{a}$ orthogonal ist. Man braucht nur die Bedingung $a_1b_1+a_2b_2=0$ zu erfüllen.
Dies erreicht man am einfachsten dadurch, daß man

$b_1=a_2$ und $b_2=-a_1$ oder $b_1=-a_2$ und $b_2=a_1$ wählt.

Beispiele:

1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ oder $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$; $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ oder $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}-7\\-2\end{pmatrix}$.

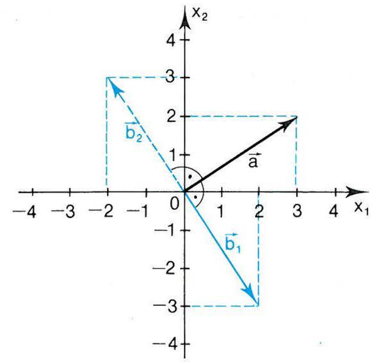


Bild 8.15

3. Mit Hilfe der Koordinatendarstellung lassen sich die für das Skalarprodukt geltenden **Gesetze** leicht beweisen. Man könnte bei der Suche nach diesen Gesetzen zunächst an die für die Zahlenverknüpfungen und für die Vektoraddition geltenden Gesetze, also an die Gruppengesetze denken und nach vergleichbaren Gesetzen für das Skalarprodukt suchen. Da das Ergebnis beim Skalarprodukt aber kein Vektor, sondern eine Zahl ist, scheiden das Assoziativgesetz, das Neutralitätsgesetz und das Inversitätsgesetz als mögliche Gesetze für das Skalarprodukt von vornherein aus. Begründe dies im einzelnen (Aufgabe 19)!

4. Von den Gruppengesetzen gilt beim Skalarprodukt nur das **Kommutativgesetz:**

S8.7 Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

Den Beweis kann man sowohl mit Hilfe von Definition D8.1 wie mit Satz S8.6 in einfacher Weise führen (Aufgabe 20).

5. Multipliziert man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit zwei Zahlen r und s, so ergibt sich für das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}(r\vec{a})\cdot(s\vec{b})=\begin{pmatrix}ra_1\\ra_2\\ra_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}sb_1\\sb_2\\sb_3\end{pmatrix}&=(ra_1)(sb_1)+(ra_2)(sb_2)+(ra_3)(sb_3)\\&=(rs)(a_1b_1)+(rs)(a_2b_2)+(rs)(a_3b_3)\\&=rs(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\&=rs(\vec{a}\cdot\vec{b}).\end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen:

S8.8 Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $(r\vec{a})\cdot(s\vec{b})=rs(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Für den Sonderfall $s=1$ ergibt sich aus Satz S8.8:

S8.9 Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $(r\vec{a})\cdot\vec{b}=r(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Man spricht bei diesem Satz gelegentlich vom **„gemischten Assoziativgesetz“.**

6. Schließlich gilt noch das **Distributivgesetz:**

S 8.10 Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ gilt: $\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Der **Beweis** soll in Aufgabe 22 geführt werden.

Bemerkung: Für ebene Vektoren kann man die Gültigkeit des Distributivgesetzes auch geometrisch zeigen. In Bild 8.16 ist dies dargestellt für den Fall, daß $\vec{b}_a \uparrow\uparrow \vec{a}$ und $\vec{c}_a \uparrow\uparrow \vec{a}$ gilt. Der Zeichnung entnimmt man

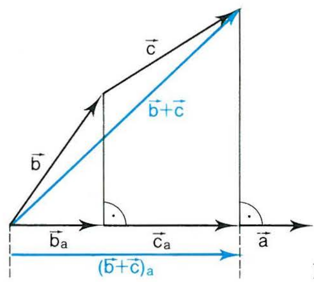


Bild 8.16

$$|(\vec{b}+\vec{c})_a| = |\vec{b}_a| + |\vec{c}_a|;$$

also gilt: $\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\ |(\vec{b}+\vec{c})_a|$

$$= |\vec{a}|(|\vec{b}_a| + |\vec{c}_a|) = |\vec{a}|\ |\vec{b}_a| + |\vec{a}|\ |\vec{c}_a| = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Begründe die einzelnen Beweisschritte!
Die anderen Fälle sind entsprechend zu behandeln.
Aus dem Distributivgesetz läßt sich – wie in der gewöhnlichen Zahlenalgebra – die Allgemeingültigkeit einer Reihe von weiteren Gleichungen herleiten, z.B.

$$(\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} \quad \text{(Aufgabe 23).}$$

7. Mit Hilfe der Koordinatendarstellung des Skalarproduktes gelingt es nun auch, die Größe eines Winkels zu berechnen, der von zwei Vektoren eingeschlossen wird. Nach Definition D 8.1 gilt für $|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}.$$

Beispiele:

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2+3-2 = 3;$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}.$$

Also gilt: $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{3}{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{3}{2 \cdot \sqrt{21}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}9°.$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -3-6+4 = -5.$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}.$$

Also gilt: $\cos = \dfrac{-5}{\sqrt{21 \cdot 19}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 104{,}5°.$

8. Das Skalarprodukt läßt sich in naheliegender Weise auf Vektoren mit beliebig vielen (n) Koordinaten übertragen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

An einem **einfachen Beispiel** wollen wir die Anwendbarkeit dieses Produktes außerhalb der Geometrie verdeutlichen.
Eine Großhandelsfirma führt eine Bestellung von n Waren aus. Die Stückzahlen der einzelnen Waren werden erfaßt durch den Anzahlvektor $\vec{a}$ und die Preise für die einzelnen Waren durch den Preisvektor $\vec{p}$. Dann ist der Rechnungsbetrag R gegeben durch das Skalarprodukt

$$R = \vec{a} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n.$$

Übungen und Aufgaben

1. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Untersuche, welche von den folgenden Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen!

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_5 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a}_6 = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{a}_7 = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$

3. Untersuche, ob $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander orthogonal sind!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0{,}1\overline{6} \\ 0{,}\overline{3} \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

4. Berechne die Längen der folgenden Vektoren!

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Zeige, daß für die folgenden Vektorpaare gilt: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$! Was folgt daraus für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

6. Bestimme die Größe des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkels!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}12\\-4\\3\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}$

7. Zeige, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Würfel aufspannen! Ermittle die Größen der Winkel, die von je zwei Raumdiagonalen des Würfels eingeschlossen werden!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-14\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}11\\-2\\-10\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}-10\\-5\\-10\end{pmatrix}$

8. Ein Quader hat die Kantenlängen 6 cm, 6 cm und 3 cm.
a) Berechne die Größen der Winkel zwischen je zwei Raumdiagonalen!
b) Berechne die Größen der Winkel zwischen einer Raumdiagonalen und den drei Kanten des Quaders!

9. Ermittle mit Hilfe des Skalarproduktes die Länge der Projektionen des Vektors zu $\overrightarrow{AB}$ auf den Vektor zu $\overrightarrow{AC}$! Bestätige das Ergebnis durch eine Zeichnung!
a) A(0|0); B(3|4); C(5|1) **b)** A(0|0); B(−4|1); C(3|3)
c) A(−2|1); B(4|3); C(−4|5) **d)** A(2|−3); B(5|−1); C(−2|3)

10. Drei Geraden g_1, g_2 und g_3 bilden ein Dreieck ABC. Berechne die Seitenlängen und die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks! Probe!

a) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $g_3\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$

b) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-4\\4\\7\end{pmatrix}$ $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $g_3\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$

11. Berechne die Seitenlängen und die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC! Probe!
a) A(2|−1), B(−5|0), C(−1|3) **b)** A(5|−1|−3), B(1|3|4), C(5|−1|2)

12. Berechne im Viereck ABCD die Seitenlängen und die Größen der Innenwinkel!
a) A(−1|−3), B(6|−2), C(2|1), D(3|−6)
b) A(1|2|−4), B(−3|6|3), C(1|2|1), D(5|−2|−6)

13. Welche Form hat das Viereck ABCD? Berechne die Seitenlängen und die Größen der Winkel, die der Vektor zu $\overrightarrow{AC}$ mit den beiden Seitenvektoren einschließt!
a) A(5|−1|0), B(10|−2|3), C(12|−4|−1), D(7|−3|−4)
b) A(5|2|0), B(4|6|6), C(2|10|3), D(3|6|−3)

14. Prüfe, ob die folgenden acht Punkte im Raum die Eckpunkte eines Würfels sind!
A(2|9|6), B(12|19|1), C(22|8|−1), D(12|−2|4),
E(7|11|20), F(17|21|15), G(27|10|13), H(17|0|18)

15. Berechne für einen Würfel die Größen der folgenden Winkel!

a) Winkel zwischen einer Flächendiagonalen und den anstoßenden Kanten

b) Winkel zwischen einer Raumdiagonalen und den anstoßenden Kanten

c) Winkel zwischen zwei Raumdiagonalen

d) Winkel zwischen einer Raumdiagonalen und einer anstoßenden Flächendiagonalen

e) Winkel zwischen einer Raumdiagonale und der Verbindungsstrecke der Mitten gegenüberliegender Kanten

16. Der Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ soll auf den beiden Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ **und** $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ senkrecht stehen. Bestimme die Koordinaten y und z! Deute das Ergebnis geometrisch!

17. Bestimme die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils so, daß sie die gleiche Länge haben wie der Vektor $\vec{a}$! Wie viele Lösungen gibt es jeweils?

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\-4\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}\sqrt{10}\\y\\-2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\-4\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\-3\\z\end{pmatrix}$

18. Ermittle zum Vektor $\vec{a}$ einen Vektor $\vec{b}$, der zu $\vec{a}$ orthogonal ist und die Länge b hat!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $b=\sqrt{5}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\-3\\4\end{pmatrix}$, $b=5$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}$, $b=3\sqrt{5}$

19. Begründe, daß für das Skalarprodukt die Gesetze A, N und I nicht gelten können!

20. Beweise das Kommutativgesetz für das Skalarprodukt (S 8.7) **a)** aus der Definition D 8.1 und **b)** aus der Koordinatendarstellung (S 8.6)!

21. Beweise geometrisch, daß für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $|\vec{a}|\,|\vec{b}_a|=|\vec{b}|\,|\vec{a}_b|$ (Projektionssatz, Bild 8.17)! Leite daraus die Gültigkeit des Kommutativgesetzes für das Skalarprodukt her!

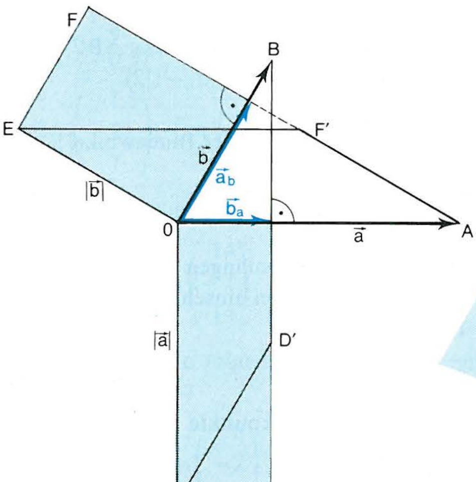


Bild 8.17

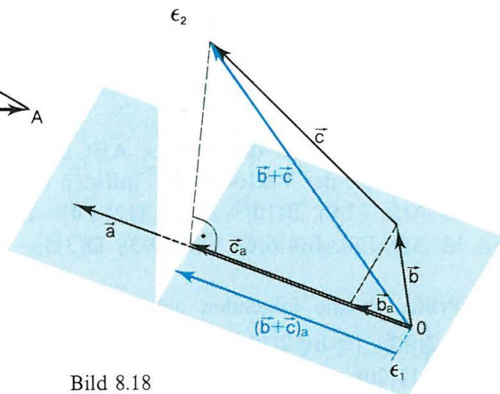


Bild 8.18

22. Beweise das Distributivgesetz für das Skalarprodukt (S 8.10)!

23. Begründe, daß beim Skalarprodukt für das Ausmultiplizieren von Summen die gleichen Formeln gelten wie in der Algebra!

24. Begründe, daß im Fall von Bild 8.18 (Seite 142) für die nichtkomplanaren Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt: $(\vec{b}+\vec{c})_a = \vec{b}_a + \vec{c}_a$! Leite daraus die Gültigkeit des Distributivgesetzes des Skalarproduktes (S 8.10) für diesen Fall her!

25. Der Versuch, das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$ zu definieren, scheitert daran, daß dann das Distributivgesetz nicht gilt. Weise dies nach! Anleitung: Benutze Vektoren mit $\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$!

26. **a)** Folgt aus $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2$, daß $\vec{a}=\vec{b}$ sein muß?
b) Untersuche an Hand von Bild 8.19, ob für das Skalarprodukt die Rechtsstreichungsregel (das Regularitätsgesetz) gilt! Prüfe auch den Fall kollinearer Vektoren!

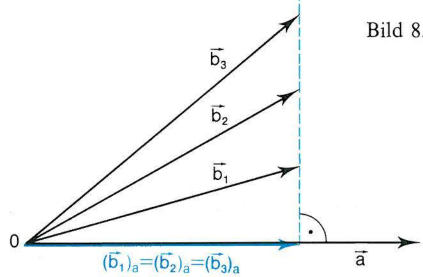


Bild 8.19

27. Ein Autohändler im Rheinland verkauft hauptsächlich die sechs Modelle eines großen Autoherstellers der Bundesrepublik. Er vergleicht Absatz und Umsatz im September 1983 mit den Zahlen des entsprechenden Vorjahresmonats.
Berechne für die beiden Septembermonate vektoriell den Gesamtumsatz!

Absatz / Modelle	September 1982		September 1983	
	Absatz	Preis	Absatz	Preis
Polo	4	11300,–	6	12000,–
Golf	15	13100,–	22	14000,–
Passat	5	16500,–	12	17000,–
Santana	1	18500,–	5	19000,–
Scirocco	1	20500,–	5	21000,–
Transporter	3	22500,–	6	23000,–

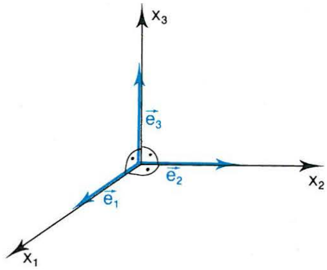
28. Ein Winzerehepaar vom Mittelrhein besuchte im November 1983 seine Kunden im Kölner Raum. Am Abend stellen sie fest, daß sie vorwiegend sieben Sorten verkauft haben. Die Anzahlen der abgesetzten Flaschen und die zugehörigen Sortenpreise weist die nachfolgende Tabelle aus. Berechne den erzielten Tagesumsatz!

Sorten / Umsatz	Lennenborn '82	Schloß Stahleck '82	Faber '82	Schloß Stahleck '79	Schloß Stahleck '78	Wolfshöhle '79	Wolfshöhle '76
Anzahl	120	480	160	30	60	80	80
Preis	4,30 DM	5,90 DM	5,20 DM	6,50 DM	6,90 DM	7,20 DM	12,00 DM

III. Einheitsvektoren

1. Wir haben ebene und räumliche Vektoren stets durch ihre Koordinaten in einem Kartesischen Koordinatensystem erfaßt. Im Raum wird ein solches Koordinatensystem aufgespannt von den drei Basisvektoren

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{(Bild 8.20).}$$



Diese Basisvektoren sind dadurch gekennzeichnet, daß sie alle die Längenmaßzahl 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen. Diese Eigenschaften kann man mit Hilfe des Skalarproduktes beschreiben. Es gilt:

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3=1 \quad \text{und} \quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1=0.$$

Wir fassen diese Beziehungen zusammen im Satz:

S 8.11 Für die Basisvektoren eines Kartesischen Koordinatensystems gilt:

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=\begin{cases}1 & \text{für } i=k\\ 0 & \text{für } i\neq k.\end{cases}$$

Die Gleichungen von Satz S 8.11 bringen zum Ausdruck, daß die Basisvektoren eines Kartesischen Koordinatensystems

1) **Einheitsvektoren** sind (man spricht daher von einer **„normierten Basis"**) und
2) paarweise zueinander **orthogonal** sind (man spricht daher sogar von einer **„orthonormierten Basis"**).

Dabei ist der Begriff des „Einheitsvektors" folgendermaßen definiert:

D 8.3 Unter einem „Einheitsvektor $\vec{e}$" versteht man einen Vektor mit dem Betrag 1, also mit $|\vec{e}|=1$.

2. Ein beliebiger Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ist aus den drei Basisvektoren folgendermaßen erzeugbar:
$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$. Bestätige dies geometrisch und arithmetisch (Aufgabe 3)!
Umgekehrt kann man die Koordinaten eines Vektors $\vec{a}$ aus den Basisvektoren mit Hilfe des Skalarproduktes darstellen. Es gilt nämlich:

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0=a_1$$

und entsprechend $\vec{a}\cdot\vec{e}_2=a_2$ und $\vec{a}\cdot\vec{e}_3=a_3$. Vergleiche auch Aufgabe 4b!

S 8.12 Für die Koordinaten eines Vektors $\vec{a}$ gilt: $a_1=\vec{a}\cdot\vec{e}_1$, $a_2=\vec{a}\cdot\vec{e}_2$ und $a_3=\vec{a}\cdot\vec{e}_3$.

3. Schon im Zusammenhang mit der Parameterform einer Geradengleichung haben wir die Richtung der betreffenden Geraden durch einen **„Richtungsvektor"** $\vec{a}$ festgelegt, also durch einen Vektor, der einen in der betreffenden Geraden liegenden Pfeil als Repräsentanten besitzt.
Häufig ist es zweckmäßig, als Richtungsvektor einen **Einheitsvektor** zu wählen. Aus einem beliebigen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ erhält man einen Einheitsvektor für die betreffende Richtung dadurch, daß man $\vec{a}$ mit $\frac{1}{|\vec{a}|}$ multipliziert: $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$; denn es gilt: $|\vec{e}_a| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$.

Umgekehrt können wir jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit Hilfe seines Betrages und des zugehörigen Einheitsvektors ausdrücken:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a; \quad \text{denn es gilt: } |\vec{a}|\,\vec{e}_a = |\vec{a}|\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}.$$

S8.13 Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es einen Einheitsvektor $\vec{e}_a$ mit $\vec{e}_a \uparrow\uparrow \vec{a}$; es gilt:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{und} \quad \vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{e}_a.$$

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche arithmetisch, ob die folgenden Vektoren Einheitsvektoren sind! Prüfe dies bei a) und b) auch mit Hilfe der Zeichnung!

a) $\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_5 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 \\ \sqrt{13} \end{pmatrix}$

b) $\vec{b}_1 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_2 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_3 = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_4 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_5 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$

2. Bilde zu den folgenden Vektoren je ein Paar von Einheitsvektoren gleicher Richtung!

a) $\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{7} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -6 \\ -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. Zeige arithmetisch und geometrisch, daß für jeden Vektor $\vec{a}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ bzw. $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$!

4. a) Bestätige den Satz S8.12 für die in Aufgabe 2 gegebenen Vektoren durch Berechnen der Skalarprodukte $\vec{a}\cdot\vec{e}_1$, $\vec{a}\cdot\vec{e}_2$, $\vec{a}\cdot\vec{e}_3$!

b) Beweise den Satz S8.12 unmittelbar aus der Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren!

5. Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bilden eine orthonormierte Basis des V_2. Zeige, daß die folgenden Vektoren jeweils ebenfalls orthonormierte Basen des V_2 bilden!

a) $\vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$; $\vec{e}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$ **b)** $\vec{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$; $\vec{e}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1-\vec{e}_2)$

c) Bestimme die Zahl r so, daß auch $\vec{e}_3=r(\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2)$ und $\vec{e}_4=r(\vec{e}_2-\frac{1}{2}\vec{e}_1)$ eine orthonormierte Basis bilden!

6. Die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden eine orthonormierte Basis des V_3. Prüfe, ob die folgenden Tripel von Vektoren ebenfalls wieder eine orthonormierte Basis des V_3 bilden!

a) $\vec{e}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$; $\vec{e}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$; $\vec{e}_6=\vec{e}_3$

b) $\vec{e}_4=\frac{1}{2}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\sqrt{2}\vec{e}_3)$; $\vec{e}_5=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_2-\vec{e}_1)$; $\vec{e}_6=\frac{1}{2}(\vec{e}_1+\vec{e}_2-\sqrt{2}\vec{e}_3)$

7. a) Beweise: Schließt ein Einheitsvektor $\vec{e}$ mit den drei Koordinatenachsen nichtüberstumpfe Winkel der Größen α_1, α_2 und α_3 ein, so gilt: $e_1=\cos\alpha_1$, $e_2=\cos\alpha_2$ und $e_3=\cos\alpha_3$!
b) Zeige, daß für diese „Richtungswinkel" gilt: $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3=1$!
c) Wie lautet die entsprechende Gleichung für den ebenen Fall? Drücke diese Beziehung durch **eine** Winkelgröße aus! Zeichnung!

8. Der Vektor $\vec{a}$ bilde mit den Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ die folgenden Produkte. Ermittle $\vec{a}$, berechne seine Länge und die Größen seiner Richtungswinkel! Vergleiche Aufgabe 7!

a) $\vec{a}\cdot\vec{e}_1=4$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_2=12$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_3=3$ **b)** $\vec{a}\cdot\vec{e}_1=-12$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_2=8$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_3=-9$
c) $\vec{a}\cdot\vec{e}_1=0$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_2=-5$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_3=12$ **d)** $\vec{a}\cdot\vec{e}_1=1$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_2=-\frac{1}{3}$; $\vec{a}\cdot\vec{e}_3=\frac{1}{4}$

IV. Elementargeometrische Anwendungen des Skalarproduktes

An einigen **Beispielen** wollen wir zeigen, wie das Skalarprodukt zur Herleitung geometrischer Sätze angewendet werden kann.

1. Wir beweisen zunächst den **Kathetensatz des Euklid.** Wir erfassen die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die Hypotenuse durch den Vektor $\vec{c}$; die beiden Hypotenusenabschnitte seien p und q (Bild 8.21).

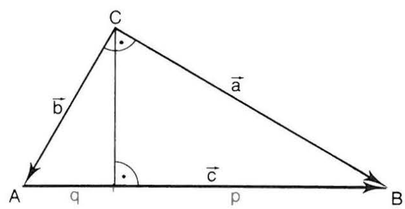


Bild 8.21

Dann lautet die **Voraussetzung:** $\vec{a}\perp\vec{b}$.
Mit den Abkürzungen $c=|\vec{c}|$ und $a=|\vec{a}|$ lautet die **Behauptung:** $cp=a^2$.

Beweis: Nach dem Kommutativgesetz des Skalarproduktes (Satz S 8.7) gilt:

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{c},$$

also nach Satz S 8.4: $\vec{c}\cdot\vec{a}_c=\vec{a}\cdot\vec{c}_a$

und somit: $|\vec{c}|\,|\vec{a}_c|=|\vec{a}|\,|\vec{c}_a|$.

Nun ist $|\vec{a}_c|=p$ und $|\vec{c}_a|=|\vec{a}|=a$. Also gilt: $cp=aa=a^2$, q.e.d.

2. Wir beweisen ferner, daß die Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkt H schneiden (Bild 8.22).
Es sei H der Schnittpunkt der beiden Höhen AH_a und BH_b. Ferner seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ die Vektoren zu den Pfeilen $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$ und $\overrightarrow{HC}$. Dann gilt für die Seitenvektoren des Dreiecks:

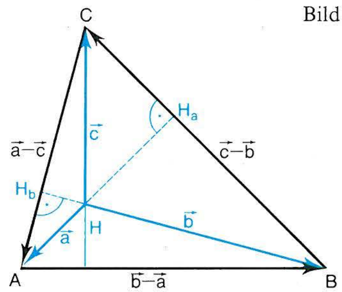


Bild 8.22

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a};\quad \overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}\quad\text{und}\quad \overrightarrow{CA}=\vec{a}-\vec{c}.$$

Da H der Schnittpunkt der beiden Höhen AH_a und BH_b sein soll, gilt:

$$\textbf{1)}\ \vec{a}\perp\vec{c}-\vec{b}\quad\text{und}\quad\textbf{2)}\ \vec{b}\perp\vec{a}-\vec{c}.$$

Die **Behauptung** besagt, daß die Gerade g(C, H) auf der dritten Seite AB senkrecht steht, daß also gilt: $\vec{c}\perp\vec{b}-\vec{a}$.

Beweis: Aus **1)** folgt: $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;
aus **2)** folgt: $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Durch Addition der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0,\qquad\text{also tatsächlich } \vec{a}-\vec{b}\perp\vec{c},\ \text{q.e.d.}$$

3. Wir beweisen schließlich den Satz, daß die Diagonalen einer Raute aufeinander senkrecht stehen.
Eine Raute ist ein Viereck mit vier gleichlangen Seiten.
Mit den Bezeichnungen von Bild 8.23 lautet daher die

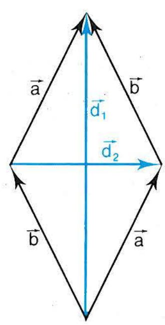


Bild 8.23

Voraussetzung: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ und die
Behauptung: $\vec{d}_1\perp\vec{d}_2$, also $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2=0$.
Beweis: Für die Diagonalen der Raute gilt:

$$\vec{d}_1=\vec{a}+\vec{b}\quad\text{und}\quad\vec{d}_2=\vec{a}-\vec{b}.$$

Daraus ergibt sich: $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$.

Wegen $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ gilt nun $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{b}$ und somit $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2=0$, q.e.d.

Übungen und Aufgaben

1. a) Beweise vektoriell: Im rechtwinkligen Dreieck (Bild 8.21) gilt $cq=b^2$ (Kathetensatz des Euklid für die Stücke $\vec{c}$, $|\vec{b}_c|=q$ und $\vec{b}$)!

b) Prüfe, welcher Satz sich in Aufgabe 21 von Seite 142 ergibt für den Fall, daß das Dreieck OBA bei B rechtwinklig ist (vgl. Bild 8.17)!

2. a) Beweise den Lehrsatz des Pythagoras, indem du die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks durch Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellst!

b) Formuliere die Umkehrung des Lehrsatzes von Pythagoras und beweise diesen Satz ebenfalls vektoriell!

3. Beweise vektoriell: Die Winkelhalbierenden zweier Nebenwinkel stehen aufeinander senkrecht!

Anleitung: Bilden die Vertreter zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel, so liegt der Vertreter von $\vec{w}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ auf der Winkelhalbierenden dieses Winkels. Begründe dies!

4. Zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf. Zeige, daß für die beiden Diagonalenvektoren bei geeigneter Orientierung gilt:
$\vec{d}_1{}^2+\vec{d}_2{}^2=2(\vec{a}^2+\vec{b}^2)$ und $\vec{d}_1{}^2-\vec{d}_2{}^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$!

5. a) Beweise vektoriell den Lehrsatz des Thales (Bild 8.24)!

b) Formuliere seine Umkehrung und beweise auch diesen Satz vektoriell!

6. Beweise vektoriell: Im gleichschenkligen Dreieck ($|\vec{a}|=|\vec{b}|$) steht die Seitenhalbierende s_c senkrecht auf der Grundseite AB!

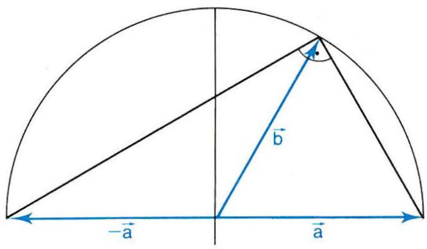


Bild 8.24

7. Beweise die folgenden Sätze vektoriell!

a) Ein Viereck, in dem sich die Diagonalen halbieren, ist ein Parallelogramm.

b) Ein Parallelogramm, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, ist ein Rhombus.

c) Ein Viereck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen und eine von der zweiten halbiert wird, ist ein Drachenviereck.

d) Zeige, daß zu den Sätzen von **a)**, **b)** und **c)** auch die Umkehrungen gültige Sätze sind!

8. Beweise die folgenden Sätze und ihre Umkehrungen!

a) Ein Parallelogramm, in dem die Diagonalen gleich lang sind, ist ein Rechteck!

b) Ein Rechteck, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, ist ein Quadrat!

9. Zeige vektoriell, daß in jedem regelmäßigen Tetraeder die Vektoren zu je zwei windschiefen Kanten zueinander orthogonal sind!

10. a) Beweise den Höhensatz des Euklid $|\vec{h}|^2 = |\vec{p}|\,|\vec{q}|$ vektoriell (Bild 8.25)!
Anleitung: Drücke $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch $\vec{h}$, $\vec{p}$ und $\vec{q}$ aus!
b) Zeige, daß auch die Umkehrung des Höhensatzes ein gültiger Satz ist!

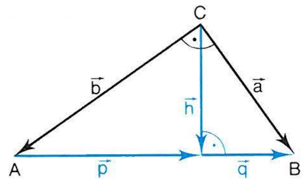


Bild 8.25

11. Beweise vektoriell: Im Quader steht jede Flächendiagonale auf zwei Kanten senkrecht!

12. Beweise vektoriell: In jedem Viereck $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0})$ gilt für die beiden Diagonalen bei geeignet gewählter Orientierung:

$$2\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - \vec{d}^2!$$

Beachte: Beim Beweis wird die Komplanarität der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ nicht benutzt. Daher gilt der Satz für entsprechende Stücke auch im Tetraeder. Deute ihn dort!

13. Beweise vektoriell den Kosinussatz der Trigonometrie: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (Bild 8.26)!

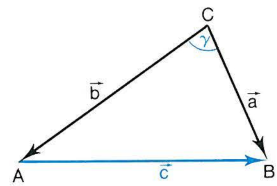


Bild 8.26

14. Zeige vektoriell, daß im Rhombus die Verbindungslinien benachbarter Seitenmitten ein Rechteck bilden! Gilt dieser Satz auch für Drachenvierecke?

15. Ein Quader werde von Vertretern dreier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt, die zueinander paarweise orthogonal sind.
a) Stelle eine Bedingung auf dafür, daß zwei der vier Raumdiagonalen aufeinander senkrecht stehen!
b) Untersuche, ob in einem Quader alle vier Raumdiagonalen paarweise zueinander orthogonal sein können!
c) Untersuche, ob in einem Quader, in dem zwei der vier Raumdiagonalen aufeinander senkrecht stehen, ein weiteres Paar von Raumdiagonalen ebenfalls zueinander orthogonal sein muß! Bilde ein Beispiel oder ggf. ein Gegenbeispiel!

16. Bei den Beweisen zu den vorangehenden Aufgaben kommen wiederholt gleiche oder ähnliche Schlußweisen vor. Beweise zunächst formal aus den algebraischen Eigenschaften des Skalarproduktes zweier Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$:

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Deute diese Aussage elementargeometrisch:
a) als Satz über ein (besonderes) Rechteck und dessen Umkehrung;
b) als Satz über Rhomben und dessen Umkehrung;
c) als Satz des Thales und dessen Umkehrung!

§ 9 Anwendungen des Skalarproduktes in der analytischen Geometrie

I. Die Normalengleichungen für Geraden und für Ebenen

1. In § 5 haben wir die Parametergleichungen für Geraden und für Ebenen kennengelernt. Gleichungen dieser Form lassen sich sofort angeben, wenn,

1) eine **Gerade** durch einen Punkt und einen Richtungsvektor (oder durch zwei Punkte),

2) eine **Ebene** durch einen Punkt und zwei Spannvektoren (oder durch drei nichtkollineare Punkte, d.h. durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen)

gegeben ist. Wir wissen aber, daß

Geraden im R_2	**Ebenen im R_3**

auch durch parameterfreie lineare Gleichungen in zwei bzw. drei Variablen dargestellt werden können. In § 5, I (Seite 72) und in § 5, II (Seite 79) haben wir bereits gezeigt, wie man die Parameter aus Gleichungen der Form

$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$	$\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$

eliminieren kann.

2. Mit Hilfe des Skalarproduktes können wir die Umformung in parameterfreie Gleichungen in wesentlich einfacherer Weise durchführen. Dies gelingt uns dadurch, daß wir die Gleichungen skalar mit einem Vektor $\vec{n}$ multiplizieren, für den

$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$	$\vec{a}\cdot\vec{n}=0 \wedge \vec{b}\cdot\vec{n}=0$

gilt, der also

auf $\vec{a}$ und somit auf der Geraden	auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und somit auf der Ebene

senkrecht steht (Bilder 9.1 und 9.2).

Man nennt einen solchen Vektor $\vec{n}$ einen **„Normalenvektor"** der Geraden (im R_2) bzw. der Ebene (im R_3).
Wir multiplizieren die Vektoren auf beiden Seiten der Parametergleichung skalar mit einem solchen Vektor $\vec{n}$:

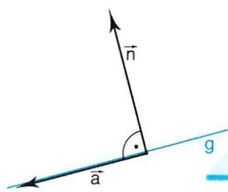


Bild 9.1

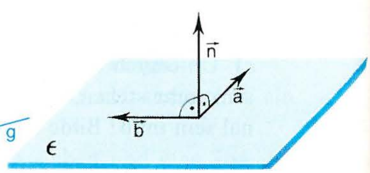


Bild 9.2

1) $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{n}=(\vec{x}_0+t\vec{a})\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}+t\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{n}}_{=0} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}}$;

2) $\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{n}=(\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b})\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}+r\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{n}}_{=0}+s\underbrace{\vec{b}\cdot\vec{n}}_{=0} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}}$.

Man nennt eine Gleichung der Form $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$ eine **„Normalengleichung"** einer Geraden (im R_2) bzw. einer Ebene (im R_3).

3. In beiden Fällen ist aus einer Parametergleichung durch Folgerungsumformungen die parameterfreie Gleichung

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$$

hergeleitet worden. Um sicherzustellen, daß durch diese neue Gleichung jeweils dasselbe geometrische Gebilde – also eine Gerade oder eine Ebene – erfaßt wird, haben wir nachzuweisen, daß umgekehrt aus der Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$ wieder die betreffende Parametergleichung hergeleitet werden kann.
Allgemein kann man dies folgendermaßen zeigen. In beiden Fällen gilt wegen des Distributivgesetzes (Satz S 8.10):

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} \iff (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0.$$

Zu 1): Die Ebene (der Raum R_2) wird aufgespannt von den beiden (linear unabhängigen) Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{n}$. Jeder Vektor der Ebene läßt sich also aus diesen beiden Vektoren erzeugen, unter anderem auch jeder Vektor der Form $\vec{x} - \vec{x}_0$. Es gibt also stets zwei Zahlen $t, r \in \mathbb{R}$ mit:

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a} + r\vec{n}.$$

Wir haben zu zeigen, daß $r = 0$ ist. Mit vorstehender Bedingung gilt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0 \iff (t\vec{a} + r\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \iff t(\vec{a} \cdot \vec{n}) + r(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 0.$$

Wegen $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{n} \neq 0$ folgt daraus unmittelbar $r = 0$. Es gilt also:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = t\vec{a} \quad (\text{mit } t \in \mathbb{R}).$$

Zu 2): Da der Vektor $\vec{n}$ auf den beiden Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht, sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{n}$ linear unabhängig, spannen also den Raum R_3 auf. Daher läßt sich jeder räumliche Vektor aus den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{n}$ erzeugen, u.a. auch jeder Vektor der Form $\vec{x} - \vec{x}_0$. Es gibt also stets drei Zahlen $r, s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} - \vec{x}_0 = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{n}.$$

Wir haben zu zeigen, daß $t = 0$ ist. Mit vorstehender Bedingung gilt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0 \iff (r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \iff r(\vec{a} \cdot \vec{n}) + s(\vec{b} \cdot \vec{n}) + t(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 0.$$

Wegen $\vec{a} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{n} \neq 0$ folgt daraus unmittelbar $t = 0$. Es gilt also:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{x} - \vec{x}_0 = r\vec{a} + s\vec{b} \quad (\text{mit } r, s \in \mathbb{R}).$$

Damit haben wir in beiden Fällen aus der Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$ die Parametergleichung (für die Gerade bzw. für die Ebene) wieder hergeleitet.
Wir haben also insgesamt gezeigt, daß durch jede Gleichung der Form

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

eine Gerade (im R_2) bzw. eine Ebene (im R_3) dargestellt wird.
Der Unterschied liegt nur darin, daß die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{x}_0$ und $\vec{n}$ im Falle einer Geraden zwei, im Falle einer Ebene drei Koordinaten haben.

4. Wir behandeln zunächst zwei **Beispiele.**

1) Eine **Gerade** sei gegeben durch die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (Bild 9.3).

In §8, II (Seite 137) haben wir bereits erörtert, wie man zu einem ebenen Vektor $\vec{a}$ einen dazu senkrechten Vektor $\vec{n}$ ermitteln kann.

Zu $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ist orthogonal z.B. der Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. Wir multiplizieren obige Geradengleichung skalar mit diesem Vektor $\vec{n}$:

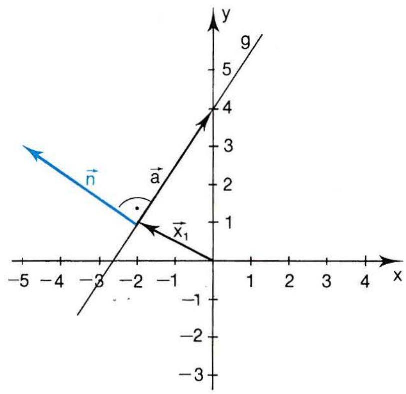


Bild 9.3

$$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}+t\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}}_{=0} \Leftrightarrow -3x+2y=6+2+t\cdot 0 \Leftrightarrow -3x+2y=8.$$

Dies ist eine Gleichung der Geraden g in allgemeiner Form.

2) Eine **Ebene** sei gegeben durch: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Ein Vektor $\vec{n}$, der auf beiden Spannvektoren senkrecht steht, muß den Bedingungen

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{n}=0 \wedge \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{n}=0, \text{ also dem Gleichungssystem } \begin{cases} n_1 \qquad\quad -3n_3=0 \\ \wedge\; 2n_1-3n_2 \qquad\; =0\end{cases}$$

genügen. Da das Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Variablen besteht, kann es nicht eindeutig lösbar sein. Das ist auch deshalb ausgeschlossen, weil wir hinsichtlich der Länge und der Orientierung des Normalenvektors keine Festlegung getroffen haben. Wir wählen daher den Wert einer Variablen, z.B. $n_3=1$; dann ergibt sich aus der ersten Gleichung $n_1=3$ und damit aus der zweiten Gleichung $n_2=2$.

Also ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der fraglichen Ebene.

Probe: $\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=3-3=0;\quad \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=6-6=0.$

Wir multiplizieren die Ebenengleichung skalar mit dem Vektor $\vec{n}$:

$$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+r\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}_{=0}+s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}_{=0} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=6$$

$$\Leftrightarrow 3x+2y+z=6.$$

Dies ist eine Gleichung der Ebene in allgemeiner Form.

Man kann diese Ebene leicht darstellen, wenn man ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenachsen kennt.

1) Für die Punkte der x-Achse gilt: $y=z=0$. Setzt man dies in die Gleichung $3x+2y+z=6$ ein, so ergibt sich $3x=6$, also $x=2$.

2) Für die Punkte der y-Achse gilt: $x=z=0$; es ergibt sich also $2y=6$, also $y=3$.

3) Für die Punkte der z-Achse gilt: $x=y=0$; es ergibt sich also $z=6$.

Bild 9.4 zeigt den Teil der Ebene, welcher im I. Oktanten liegt.

5. Wir wollen nun die **geometrische** Bedeutung von Gleichungen der Form

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$$

noch etwas näher untersuchen.
Gemeinsam ist diesen Gleichungen und den Parametergleichungen die Erfassung der Geraden bzw. der Ebene durch Ortsvektoren. Der Unterschied besteht darin, daß die Richtung der Geraden bzw. der Ebene hier nicht durch einen Richtungsvektor bzw. zwei Spannvektoren, sondern durch einen **Normalenvektor** $\vec{n}$ festgelegt wird.
Wir wollen uns im folgenden anschaulich klarmachen, daß tatsächlich die Lage einer Geraden im Raum R_2 und die Lage einer Ebene im Raum R_3 durch einen Punkt P_0 und durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ eindeutig erfaßt werden können.
Hinsichtlich einer Ebene kann man z.B. an einbeinige runde Tische denken, wie sie etwa in Eisdielen aufgestellt sind (Bild 9.5).

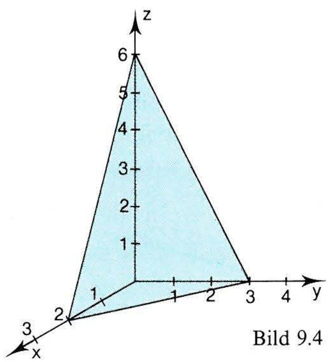


Bild 9.4


Bild 9.5

Ändert man die Lage der Geraden bzw. der Ebene bei festgehaltenem Punkt P_0, so wird auch die Richtung von $\vec{n}$ geändert (Bilder 9.6 und 9.7).

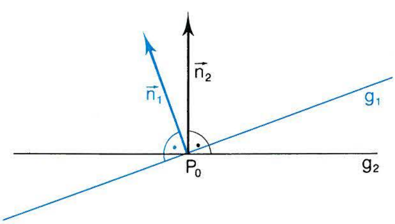


Bild 9.6

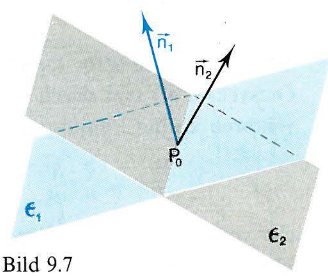


Bild 9.7

Zu jeder Geraden (im R_2) und zu jeder Ebene (im R_3) gibt es natürlich unendlich viele Normalenvektoren; diese unterscheiden sich durch ihre Länge und ihre Orientierung; sie haben aber alle dieselbe Richtung, sind also kollinear. Zu beachten ist, daß eine entsprechende Kennzeichnung für Geraden im R_3 **nicht** möglich ist; denn zu jeder Geraden im R_3 gibt es beliebig viele Normalenvektoren, die nicht kollinear, wohl aber komplanar sind (Bild 9.8). Und auch umgekehrt gibt es zu jedem Vektor $\vec{n}$ im R_3 beliebig viele Geraden, die auf $\vec{n}$ senkrecht stehen (Bild 9.9).

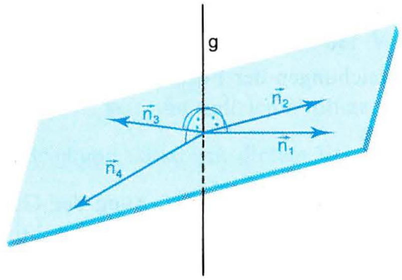


Bild 9.8

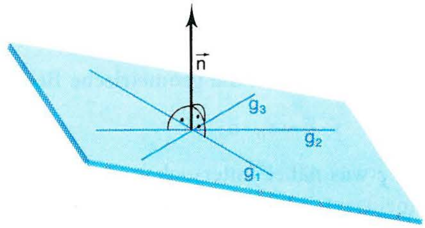


Bild 9.9

6. Wie oben bereits gezeigt, können wir die Normalengleichung $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$ folgendermaßen umformen:

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{n}-\vec{x}_0\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}=\vec{0}.$$

Die letzte Gleichung besagt, daß der Vektor $\vec{x}-\vec{x}_0$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ aufeinander senkrecht stehen. Dies ist unmittelbar einsichtig, weil die Differenzvektoren $\vec{x}-\vec{x}_0$ stets in Richtung der Geraden (Bild 9.10) bzw. der Ebene (Bild 9.11) liegen.

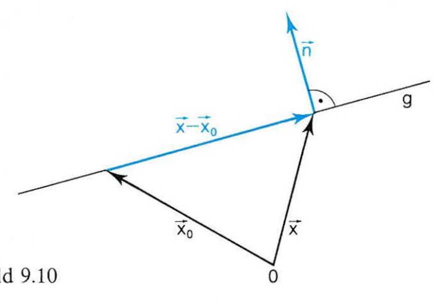


Bild 9.10

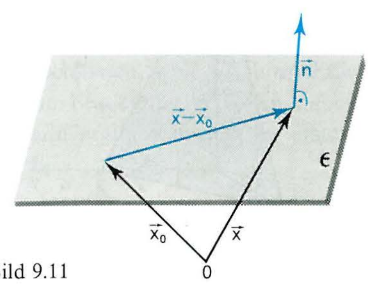


Bild 9.11

Es gilt also der Satz:

S9.1 **Ist eine Gerade g im R_2 bzw. eine Ebene ε im R_3 durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\vec{x}_0$ und durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ aller Punkte von g bzw. ε:**

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n} \quad \text{und} \quad (\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}=0.$$

Man spricht von einer „**Normalengleichung**“ der Geraden bzw. der Ebene oder auch von einer Gleichung in „**Normalenform**“.

7. An den Beispielen haben wir gesehen, daß die ausmultiplizierte Normalengleichung

1) bei Geraden die Form $ax+by=c$,

2) bei Ebenen die Form $ax+by+cz=d$ hat.

Es handelt sich also um Gleichungen, die wir früher als **„allgemeine“** Geraden- bzw. Ebenengleichungen bezeichnet haben.
Wir können nunmehr eine seit langem offene Frage wenigstens teilweise beantworten, nämlich die Frage nach der geometrischen Bedeutung der Formvariablen a, b, c bzw. a, b, c, d. Faßt man

1) bei einer Geraden die Zahlen a, b zu einem Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,

2) bei einer Ebene die Zahlen a, b und c zu einem Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

zusammen, so handelt es sich um einen **Normalenvektor** der Geraden bzw. der Ebene. Auf die Frage nach der geometrischen Bedeutung des Absolutglieds c bzw. d werden wir im folgenden Abschnitt eingehen.

8. Der aufgezeigte Sachverhalt gestattet zahlreiche Anwendungen. Wir erwähnen die Möglichkeit, den Abstand eines Punktes P_0 von einer Ebene ε zu bestimmen, die durch eine Gleichung in Normalenform gegeben ist (Bild 9.12). Man ermittelt mit Hilfe des Normalenvektors der Ebene diejenige Gerade g, die durch P_0 geht und auf der Ebene senkrecht steht, und bestimmt dann den Punkt P_1, in dem die Gerade g die Ebene ε schneidet. Die Entfernung der Punkte P_0 und P_1 ist der gesuchte Abstand (Aufgaben 15 bis 17).

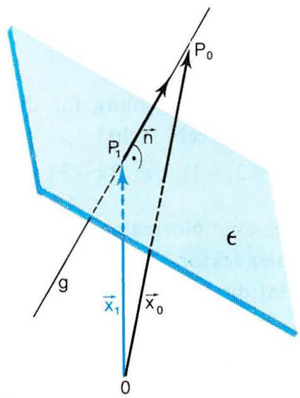


Bild 9.12

Übungen und Aufgaben

1. Bringe die Geradengleichung auf die Normalenform!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

2. Ermittle eine Normalengleichung der durch eine Parametergleichung gegebenen Ebene ε!

a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

3. Ermittle die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B in Parameter- und Normalenform!

a) $A(-1|0)$, $B(0|1)$ **b)** $A(3|-2)$, $B(0|4)$ **c)** $A(2|1)$, $B(-2|5)$ **d)** $A(-2|1)$, $B(1|4)$

4. Ermittle eine Normalengleichung für diejenige Gerade g_2 durch A, die auf der Geraden g_1 senkrecht steht!

a) $A(1|1)$; $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $A(5|0)$; $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

c) $A(2|0)$; $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ **d)** $A(1|3)$; $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

5. Welche Besonderheit weist eine Normalengleichung für eine Gerade (eine Ebene) auf, die durch den Nullpunkt geht?

6. Stelle eine Normalengleichung auf für die Gerade g, die durch den Punkt A geht und den Normalenvektor $\vec{n}$ hat!

a) $A(1|2)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $A(1|-3)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ **c)** $A(1|-1)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$

7. Ermittle eine Gleichung für die Gerade g, die durch den Punkt A geht und auf der Ebene ε senkrecht steht!

a) $A(3|-2|-1)$; $\varepsilon\colon 2x-3y+z=7$ **b)** $A(1|-2|6)$; $\varepsilon\colon -x+y-3z=2$

8. Ermittle eine Normalengleichung der Ebene ε, die durch den Punkt A verläuft und den Normalenvektor $\vec{n}$ hat! Bestimme die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen! Hat die Ebene eine besondere Lage?

a) $A(3|2|1)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ **b)** $A(0|2|3)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$ **c)** $A(-2|3|0)$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

9. Schreibe die folgenden Ebenengleichungen zunächst in allgemeiner Form, sodann in vektorieller Normalenform! Beschreibe die Lage der Ebene, z.B. mit Hilfe der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen! Zeichnung!

a) $z=-2x+8$ **b)** $y=4$ **c)** $y-x=4z-4$ **d)** $2y=6-(z+x)$

10. Ermittle die Normalengleichung einer Geraden, die durch den Punkt $A(2|-6)$ geht und

a) parallel zur x-Achse, **b)** senkrecht zur x-Achse,

c) senkrecht zur Winkelhalbierenden im I. Quadranten,

d) parallel zur Geraden zu $5x+2y=7$ verläuft!

11. Ermittle eine Normalengleichung der Ebene durch den Punkt $A(-4|1|3)$, die

a) parallel zur x-y-Ebene, **b)** senkrecht zur y-Achse,

c) parallel zur Ebene zu $2x-y-z=8$, **d)** parallel zur Ebene zu $y=x$,

e) senkrecht zur Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$ verläuft!

12. Ermittle die Normalengleichungen der Geraden, auf denen die Mittelsenkrechten und die Höhen des Dreiecks ABC liegen!

a) $A(0|4)$, $B(-5|1)$, $C(1|-4)$ **b)** $A(6|0)$, $B(-2|-5)$, $C(-3|-4)$

13. Lege durch jeden der Eckpunkte des Dreiecks ABC zwei Geraden: die eine parallel zur gegenüberliegenden Dreiecksseite, die andere senkrecht dazu. Ermittle Normalengleichungen dieser Geraden und bestimme die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

a) $A(-4|-3)$, $B(2|-1)$, $C(2|-5)$ **b)** $A(-4|1)$, $B(-2|-5)$, $C(0|1)$

14. Ein Würfel mit der Kantenlänge 4 cm hat Kanten, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Ermittle Normalengleichungen der Ebenen, die durch den Eckpunkt $P(4|4|4)$ verlaufen und jeweils auf einer der Raumdiagonalen des Würfels senkrecht stehen!

15. Ermittle den Abstand des Punktes P_0 von der Ebene ε!

a) $P_0(2|3|2)$; ε: $x-y-z=3$ **b)** $P_0(1|3|1)$; ε: $x+2y-3z=12$

16. Ermittle den Abstand der beiden Geraden g_1 und g_2! Kontrolliere durch eine Zeichnung!

a) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$

b) g_1: $2x-y=-1$; g_2: $-2x+y=-9$

17. Ermittle den Abstand der beiden Ebenen ε_1 und ε_2!

a) ε_1: $12x-4y+3z=7$; ε_2: $-12x+4y-3z=19$

b) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; ε_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

II. Die Hessesche Normalenform von Geraden- und von Ebenengleichungen

1. Im vorigen Abschnitt haben wir im Zusammenhang mit der Normalengleichung für Geraden und für Ebenen

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$$

begründet, daß die Koeffizienten in der allgemeinen

Geradengleichung $ax+by=c$	Ebenengleichung $ax+by+cz=d$

einen Normalenvektor der Geraden bzw. der Ebene bilden:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.	$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Offen geblieben ist die Frage nach der geometrischen Bedeutung des Absolutgliedes c bzw. d.

Dieser Frage wollen wir jetzt nachgehen. Wir setzen voraus, daß diese Zahlen nichtnegativ sind, daß also gilt $c \geq 0$ bzw. $d \geq 0$. (Falls das Absolutglied zunächst negativ ist, multipliziert man die Gleichung mit -1.) Der Vergleich mit der Normalenform zeigt, daß

$$c = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} = |\vec{x}_0|\,|\vec{n}| \cos\alpha \qquad \Big| \qquad d = \vec{x}_0 \cdot \vec{n} = |\vec{x}_0|\,|\vec{n}| \cos\alpha$$

ist, wenn α die Größe des Winkels zwischen $\vec{x}_0$ und $\vec{n}$ bezeichnet (Bilder 9.13 und 9.14).

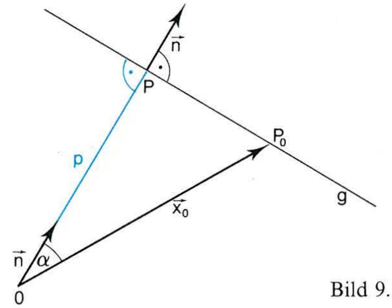


Bild 9.13

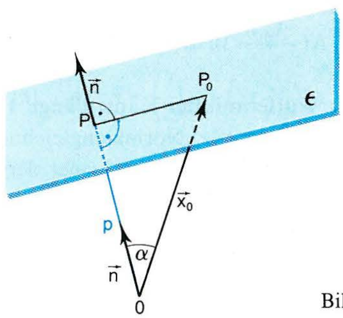


Bild 9.14

Dazu muß die Orientierung des Normalenvektors $\vec{n}$ allerdings so gewählt werden, daß $\vec{x}_0 \cdot \vec{n} \geq 0$, also $\cos\alpha \geq 0$ ist. Das ist immer dann der Fall, wenn – wie in den Bildern 9.13 und 9.14 – ein an einem Punkt der Geraden bzw. der Ebene angetragener Vertreter von $\vec{n}$ vom Nullpunkt wegweist. Aus diesem Grunde haben wir oben vorausgesetzt, daß $c \geq 0$ bzw. $d \geq 0$ sein soll. (Wenn die Gerade oder die Ebene durch den Nullpunkt geht, kommt es auf die Orientierung von $\vec{n}$ nicht an, weil dann $\vec{x}_0 \cdot \vec{n} = 0$ ist.)

Im rechtwinkligen Dreieck $O P P_0$ (Bilder 9.13 und 9.14) hat die Länge p der Kathete OP eine einfache geometrische Bedeutung: sie gibt den Abstand der Geraden bzw. der Ebene vom Nullpunkt an. Nun gilt:

$$\cos\alpha = \frac{p}{|\vec{x}_0|}, \qquad \text{also } p = |\vec{x}_0| \cos\alpha$$

und somit

$$c = |\vec{n}|\, p. \qquad \Big| \qquad d = |\vec{n}|\, p.$$

Wählt man als Normalenvektor einen **Einheitsvektor,** also einen Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$, dann ist

$$c = p, \qquad \Big| \qquad d = p,$$

d.h. das Absolutglied der Gleichung gibt in diesem Fall den **Abstand** der Geraden bzw. der Ebene vom Nullpunkt des Koordinatensystems an.

Wir erinnern an unsere Vereinbarung, daß wir unter dem **„Abstand"** – zur Vereinfachung der Sprechweise – nicht die Länge, sondern nur die **Maßzahl** dieser Länge verstehen.

2. In der Regel wird ein Normalenvektor $\vec{n}$ nicht als Einheitsvektor gegeben sein. Dadurch, daß man den Vektor $\vec{n}$ durch seinen Betrag $|\vec{n}|$ dividiert, erhält man einen **Normaleneinheitsvektor** gleicher Richtung und gleicher Orientierung; denn es gilt:

$$\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|\vec{n}|}{|\vec{n}|} = 1.$$

Wir bezeichnen den zu einem Vektor $\vec{a}$ gehörenden Einheitsvektor mit „$\vec{e}_a$".

Es ist also $\vec{e}_n = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ der zu $\vec{n}$ gehörende **„Normaleneinheitsvektor"**.

Dividiert man also eine Normalengleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x}_0 \cdot \vec{n}$ durch $|\vec{n}|$, so erhält man

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_n = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n,$$

wobei $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n = p$ ist, also den Abstand der Geraden bzw. der Ebene vom Nullpunkt angibt. Man nennt diese Gleichung die **„Hessesche**[1]**) Normalenform"** (kurz: **„Hesseform"**) der Geraden- bzw. Ebenengleichung.

Wir fassen zusammen:

S 9.2 **Ist eine Gerade (im R_2) bzw. eine Ebene (im R_3) durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\vec{x}_0$ und durch einen Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_n$ festgelegt, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ aller Punkte von g bzw. ε:**

$$\vec{x} \cdot \vec{e}_n = \vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n \quad \text{(Hessesche Normalenform).}$$

Ist die Orientierung von $\vec{e}_n$ so gewählt, daß $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n \geq 0$ ist, so gibt $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n$ den Abstand p der Geraden bzw. der Ebene vom Nullpunkt an.

Beispiele:

1) Eine Gerade g sei gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(Bild 9.15).}$$

Ein Normalenvektor der Geraden ist:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Wegen $|\vec{n}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ lautet der zugehörige Normaleneinheitsvektor:

$$\vec{e}_n = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

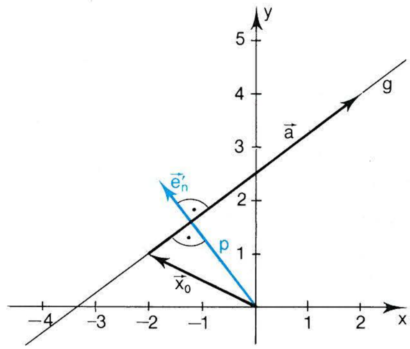


Bild 9.15

Ferner ist $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-6-4) = -\frac{10}{5} = -2 < 0.$

Dieser Normaleneinheitsvektor hat also die falsche Orientierung; wir wählen statt dessen:

$$\vec{e}_n' = -\vec{e}_n = -\tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt: $\vec{x}_0 \cdot \vec{e}_n' = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(6+4) = \frac{10}{5} = 2 > 0.$

Somit lautet die Hesseform für die Gerade g: $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 2$.

Der Abstand der Geraden vom Nullpunkt ist $p = 2$.

[1]) Ludwig Otto Hesse (1811–1874); deutscher Mathematiker, der in Königsberg, Heidelberg und München lehrte.

2) Eine Ebene ε sei gegeben durch den Punkt $P_0(1|-1|3)$ und den Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Wegen $|\vec{n}|=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$ ist ein Normaleneinheitsvektor von ε: $\vec{e}_n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.
Ferner gilt:

$$\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}(2+1+6)=\frac{9}{3}=3>0.$$

Mithin lautet die Hesseform für die Ebene ε: $2x-y+2z=3$.
Der Abstand der Ebene vom Nullpunkt ist also $p=3$.

3. Ist eine Geraden- oder eine Ebenengleichung in allgemeiner Form gegeben, so kann man sie leicht in die Hesseform überführen. Wir behandeln ein

Beispiel:

Eine Ebene ist gegeben durch die Gleichung: $-3x+y+4z=8$.

Es ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}|=\sqrt{9+1+16}=\sqrt{26}$. Also ist $\vec{e}_n=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$. Die Hesseform lautet:

$$-\frac{3}{\sqrt{26}}x+\frac{1}{\sqrt{26}}y+\frac{4}{\sqrt{26}}z=\frac{8}{\sqrt{26}}.$$

Die Ebene hat vom Nullpunkt den Abstand $p=\frac{8}{\sqrt{26}}\approx 1{,}57$.

Übungen und Aufgaben

1. Bringe die Gleichung der Geraden g auf die Hessesche Normalenform und ermittle den Abstand der Geraden vom Nullpunkt!

a) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=10$ **b)** $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=25$ **c)** $\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=-19{,}5$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}17\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$ **f)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ **g)** $3x-y-10=0$

2. Bringe die Gleichung der Ebene ε jeweils auf die Hessesche Normalenform und ermittle den Abstand der Ebene vom Nullpunkt!

a) $\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=-26$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\-8\\-4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=9$ **c)** $4x-7y-4z+18=0$

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\5\\-2\end{pmatrix}$ **e)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\6\\2\end{pmatrix}$

3. Ermittle die Hesseform der Ebene ε durch die Punkte A, B und C! Berechne jeweils den Abstand der Ebene vom Nullpunkt und ihre Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen! Ermittle mit deren Hilfe eine (andere) Parametergleichung der Ebene!

a) $A(6|2|1)$, $B(10|1|0)$, $C(10|3|4)$ **b)** $A(4|1|1)$, $B(8|-3|-2)$, $C(4|0|2)$

4. Ermittle Gleichungen von drei Ebenen, die auf der Ebene zu $6x+2y+3z=18$ senkrecht stehen und vom Nullpunkt den Abstand $p=6$ haben!

5. Wie lauten die Gleichungen derjenigen beiden Geraden, die durch den Punkt $A(-2|4)$ gehen und vom Nullpunkt den Abstand $p=2$ haben? Kontrolliere das Ergebnis durch eine Zeichnung!

III. Schnitt- und Winkelaufgaben

1. Schnitt einer Geraden mit einer Ebene

Wenn eine Ebene ε durch eine Normalengleichung und eine Gerade g (im R_3) durch eine Parametergleichung gegeben sind, kann ein etwaiger Schnittpunkt durch Einsetzen der einzelnen Koordinaten der Geradengleichung in die Ebenengleichung bestimmt werden.

Beispiel:

1) Gegeben: Ebene ε durch $2x-3y+z=3$ und Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Für die Koordinaten von $\vec{x}$ gilt also:

$$x=-1+2t,\quad y=2-t\quad \text{und}\quad z=1-2t.$$

Durch Einsetzen dieser Bedingungen in die Ebenengleichung erhält man:

$$2(-1+2t)-3(2-t)+(1-2t)=3$$
$$\Leftrightarrow\ -2+4t-6+3t+1-2t=3$$
$$\Leftrightarrow\ 5t=10\ \Leftrightarrow\ t=2.$$

Der Schnittpunkt ist also gegeben durch: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$.

Bemerkungen:

a) Da für den Schnittpunkt (Durchstoßpunkt) P_1 gilt $y_1=0$, liegt er in der x-z-Ebene, in der Seitenrißebene.

b) Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man unabhängig von der Berechnung des Schnittpunktes Aufschluß über die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene erhalten. Für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Gerade gilt nämlich:

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=4+3-2=5\neq 0.$$

Daher sind Gerade und Ebene **nicht** zueinander parallel, schneiden sich also in genau einem Punkt.

2) Gegeben: Ebene ε durch $x+3y-z=4$ und Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.
Durch Einsetzen in die Ebenengleichung erhält man:

$$2+t+3(1-t)-(1-2t)=4$$

$$\Leftrightarrow\; 2+t+3-3t-1+2t=4 \;\Leftrightarrow\; 0\cdot t+4=4.$$

Diese Gleichung ist allgemeingültig in t; jeder Parameterwert der Geraden erfüllt auch die Ebenengleichung; dies bedeutet, daß die Gerade g ganz in der Ebene ε liegt.

Bemerkung: Für den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Gerade gilt:

$$\vec{n}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=1-3+2=0.$$

Dies bedeutet, daß $\vec{n}\perp\vec{a}$ ist, Ebene und Gerade also zueinander parallel sind.

3) Gegeben: Ebene ε durch $x+3y-z=4$ und Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.
Durch Einsetzen in die Ebenengleichung erhält man:

$$(-3+t)+3(1-t)-(2-2t)=4$$

$$\Leftrightarrow\; -3+t+3-3t-2+2t=4 \;\Leftrightarrow\; 0\cdot t-2=4.$$

Diese Gleichung ist unerfüllbar in t; kein Parameterwert der Geraden erfüllt auch die Ebenengleichung; dies bedeutet, daß die Gerade g parallel zur Ebene verläuft.

Bemerkung: Das Beispiel unterscheidet sich vom vorhergehenden nur durch den Ortsvektor $\vec{x}_0$ der Geraden. Es gilt also auch hier $\vec{n}\cdot\vec{a}=0$. Dies bedeutet auch in diesem Fall, daß Gerade und Ebene parallel zueinander verlaufen.

2. Schnitt zweier Ebenen

Zwei nichtparallele Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden sich in einer Geraden g. Wie man die Parametergleichungen für g ermitteln kann, haben wir schon in § 7, I (Seite 112) besprochen. Wir erläutern ein anderes Verfahren an dem folgenden

Beispiel: Gegeben: ε_1 durch $2x-y+3z=4$; ε_2 durch $x+2y-z=1$.

Die Normalenvektoren der beiden Ebenen sind

$$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Diese beiden Vektoren sind nicht kollinear; dies bedeutet, daß die beiden Ebenen nicht parallel sind, sich also in einer Geraden g schneiden (Bild 9.16). Da $\vec{n}_1$ auf ε_1 senkrecht steht, steht $\vec{n}_1$ auch auf der Schnittgeraden senkrecht; ebenso steht $\vec{n}_2$ auf ε_2, also auch auf der Schnittgeraden senkrecht. Für den Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden muß also gelten:

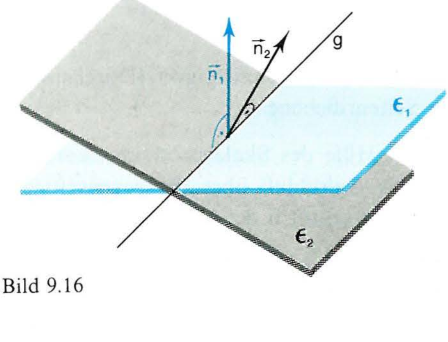


Bild 9.16

$$\vec{n}_1\cdot\vec{a}=0 \wedge \vec{n}_2\cdot\vec{a}=0, \qquad \text{also } 2a_1-a_2+3a_3=0 \wedge a_1+2a_2-a_3=0.$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar; dies ist auch deshalb nicht möglich, weil es auf die Länge des Richtungsvektors $\vec{a}$ nicht ankommt. Wir können also eine Koordinate von $\vec{a}$ frei wählen, z.B. $a_3=1$. Dann ergibt sich

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_1-\ a_2=-3 \quad |\cdot 2 \quad |\cdot(-1) \\ \wedge\ \ a_1+2a_2=\ \ 1 \quad \downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5a_1=-5 \\ \wedge\ 5a_2=\ \ 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1=-1 \\ \wedge\ a_2=\ \ 1 \end{array}\right\}.$$

Damit haben wir einen Richtungsvektor der Schnittgeraden von ε_1 und ε_2 gefunden: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Beachte: In diesem Fall ist es nicht sinnvoll, z.B. $a_3=0$ zu wählen; denn dann würde sich auch $a_1=a_2=0$, also die triviale Lösung und somit insgesamt der Nullvektor ergeben, der als Richtungsvektor nicht verwendbar ist.
Um einen Punkt P_0 der Schnittgeraden zu ermitteln, wählen wir z.B. $z=0$. Dann bleibt:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x-\ y=4 \quad |\cdot 2 \quad |\cdot(-1) \\ \wedge\ \ x+2y=1 \quad \downarrow\cdot 1 \quad \downarrow\cdot 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x=\ \ 9 \\ \wedge\ 5y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\ \ \frac{9}{5} \\ \wedge\ y=-\frac{2}{5} \end{array}\right\}.$$

Somit gilt: $\vec{x}_0=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9\\-2\\0\end{pmatrix}$. Eine Gleichung der Geraden lautet also: $\vec{x}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}9\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Bestätige, daß sich durch Berechnung der Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems eine Parametergleichung für dieselbe Gerade ergibt (Aufgabe 5)!

Bemerkungen:

1) Es ist nicht in jedem Fall möglich, $z=0$ zu wählen. Wenn nämlich die Schnittgerade parallel zu der durch $z=0$ dargestellten Grundrißebene verläuft – ohne in dieser Ebene zu liegen – gibt es keinen Punkt, der auf der Schnittgeraden und in der Grundrißebene liegt.

2) Die Bestimmung des Richtungsvektors $\vec{a}$ aus den beiden Gleichungen $\vec{n}_1\cdot\vec{a}=0$ und $\vec{n}_2\cdot\vec{a}=0$ ist ziemlich umständlich. Mit Hilfe des in §10 einzuführenden Vektorproduktes werden wir dies schneller durchführen können.

3) Ein **Sonderfall** liegt vor, wenn die Schnittgerade zwischen einer Ebene ε und einer Koordinatenebene bestimmt werden soll; man spricht in diesem Fall von der **„Spurgeraden“** der Ebene ε in der Koordinatenebene.

Beispiel:

Gegeben: ε durch $4x+2y+3z=6$.
Es soll die Spurgerade dieser Ebene in der Grundrißebene, also der Ebene zu $z=0$, bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser Bedingung in die Ebenengleichung erhält man: $4x+2y=6 \Leftrightarrow y=-2x+3$
Dies ist die Gleichung der Spurgeraden in der Grundrißebene. Zur Darstellung der Ebene ermitteln wir noch den Durchstoßpunkt der z-Achse mit Hilfe der Bedingung $x=y=0$: $3z=6 \Leftrightarrow z=2$ (Bild 9.17).

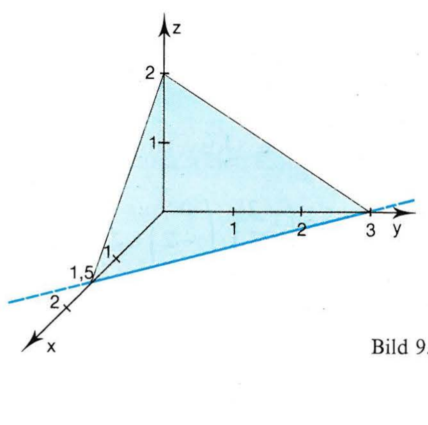


Bild 9.17

3. Winkel zwischen zwei Geraden

Wenn zwei Geraden sich schneiden, so schließen sie mehrere Winkel miteinander ein. Wir müssen also zunächst vereinbaren, was wir unter „**dem** Winkel zwischen zwei Geraden" verstehen wollen.
Am nächstliegenden ist es, unter dem „Winkel zwischen zwei Geraden g und h" den **kleinsten** Winkel zu verstehen, den zwei Halbgeraden von g und h miteinander bilden; das ist in Bild 9.18 $\sphericalangle\alpha$. Dieser Winkel ist stets ein spitzer oder höchstens ein rechter Winkel. Wir können die Größe dieses Winkels mit Hilfe des Skalarproduktes zweier Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ der beiden Geraden berechnen.

1) Gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, so ist der Winkel zwischen den Geraden g und h zugleich der Winkel, den die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen (Bild 9.19). Es gilt dann:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}.$$

2) Gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, so schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen stumpfen Winkel $\sphericalangle\beta$ ein (Bild 9.20). Die gesuchte Winkelgröße α erhält dann dadurch, daß man z.B. $\vec{a}$ durch $-\vec{a}$ oder $\vec{b}$ durch $-\vec{b}$ ersetzt:

$$\cos\alpha=\frac{(-\vec{a})\cdot\vec{b}}{|-\vec{a}|\,|\vec{b}|}=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|};\quad \text{denn dann gilt } \cos\alpha>0.$$

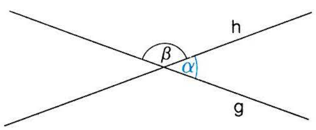


Bild 9.18

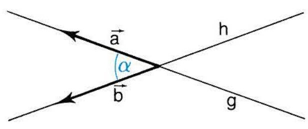


Bild 9.19

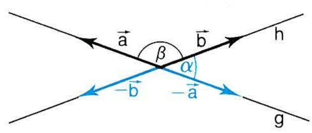


Bild 9.20

3) Gilt $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, so stehen die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und somit auch die Geraden g und h aufeinander senkrecht.

Man kann alle drei Fälle zusammenfassen in der Formel:

$$\boldsymbol{\cos\alpha=\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right|.}$$

Beispiel: Gegeben: g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; h durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Da die gegebenen Ortsvektoren übereinstimmen, schneiden sich die Geraden im Punkt $P_0(2|2|-3)$.

Es gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=2-2-2=-2$; $|\vec{a}|=\sqrt{6}$; $|\vec{b}|=\sqrt{9}=3$;

mithin ergibt sich: $\cos\alpha=\left|\frac{-2}{3\sqrt{6}}\right|=\frac{2}{3\sqrt{6}} \;\Rightarrow\; \alpha\approx 74{,}2°$.

Sind zwei Geraden g_1 und g_2 (im R_2) durch Normalengleichungen gegeben, so bestimmt man die Größe des Winkels zwischen den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$; denn dieser Winkel ist maßgleich mit einem der beiden nicht überstumpfen Winkel zwischen g_1 und g_2. Die möglichen Fälle (Bilder 9.21 und 9.22) werden wiederum erfaßt durch die Formel

$$\mathbf{\cos\alpha = \left|\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|}.$$

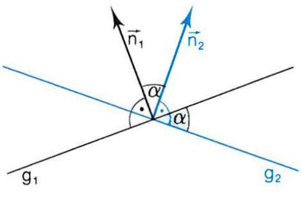


Bild 9.21

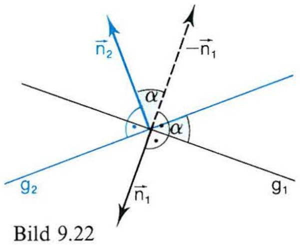


Bild 9.22

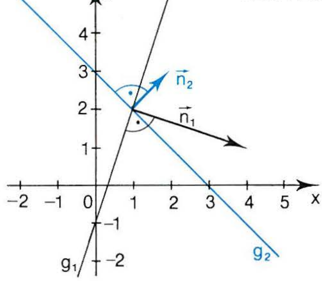


Bild 9.23

Beispiel: Gegeben: g_1 durch $3x - y = 1$; g_2 durch $x + y = 3$ (Bild 9.23)

Es gilt: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$

und $|\vec{n}_1| = \sqrt{10}$; $|\vec{n}_2| = \sqrt{2}$. Daraus ergibt sich:

$$\cos\alpha = \left|\frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63{,}4°.$$

4. Winkel zwischen Geraden und Ebenen

Unter dem **„Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε“** versteht man den $\sphericalangle\alpha$, den die Gerade mit ihrer senkrechten Projektion auf die Ebene einschließt (Bilder 9.24 und 9.25).

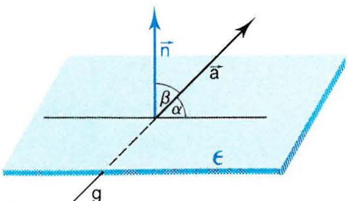


Bild 9.24

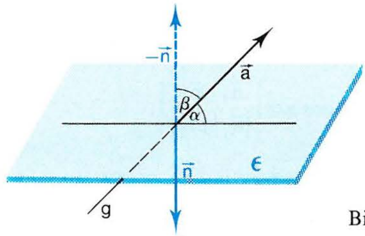


Bild 9.25

Sind die Gerade durch eine Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ und die Ebene durch eine Normalengleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = p$ gegeben, so kann man die Größe dieses Winkels ebenfalls mit Hilfe des Skalarproduktes der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{n}$ bestimmen. Weisen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{n}$ in denselben Halbraum von ε (Bild 9.24), so ist $\sphericalangle\beta$ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ der Komplementwinkel des gesuchten Winkels $\sphericalangle\alpha$, in diesem Falle gilt also: $\cos\beta = \sin(90° - \beta) = \sin\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|}$.

Weisen $\vec{a}$ und $\vec{n}$ in entgegengesetzte Halbräume von ε (Bild 9.25), so kann man z.B. $\vec{n}$ durch $-\vec{n}$ ersetzen.

Beide Fälle kann man wiederum zusammenfassen in der Formel $\mathbf{\sin\alpha = \left|\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}|\,|\vec{n}|}\right|}$.

Beispiele:

1) Gegeben: ε durch $2x-3y+z=3$; g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Die Ebene und die Gerade schneiden sich im Punkt $P_1(3|0|-3)$ (vergleiche Seite 161!).

Für $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ gilt: $\vec{a}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=4+3-2=5$;

$|\vec{a}|=\sqrt{9}=3$ und $|\vec{n}|=\sqrt{14}$. Daraus ergibt sich: $\sin\alpha=\dfrac{5}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha\approx 26{,}5°$.

2) Gesucht ist die Größe des Winkels, den die Gerade zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ mit der x-y-Ebene (Aufrißebene) einschließt.

Ein Normalenvektor der y-z-Ebene ist: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Also gilt: $\vec{a}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1$;
$|\vec{n}|=1$ und $|\vec{a}|=\sqrt{11}$. Daraus ergibt sich:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow \alpha\approx 17{,}5°.$$

5. Winkel zwischen zwei Ebenen

Wie bei Geraden wollen wir auch bei sich schneidenden Ebenen vereinbaren, daß wir unter dem **„Winkel zwischen zwei Ebenen"** stets den **kleinsten** Winkel verstehen wollen, den die Ebenen einschließen (Bild 9.26).

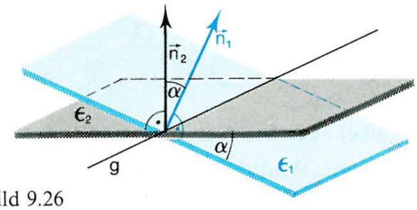


Bild 9.26

Sind die Ebenen durch Normalengleichungen gegeben, so erhält man die Größe dieses Winkels – wie bei Geraden – mit Hilfe des Skalarproduktes der beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ nach der Formel

$$\mathbf{\cos\alpha=\left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|.}$$

Beispiel: Gegeben: ε_1 durch $2x-y+3z=4$; ε_2 durch $x+2y-z=1$

Da die Normalenvektoren $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ nicht kollinear sind, schneiden sich die Ebenen in einer Geraden.

Es gilt: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=2-2-3=-3$; $|\vec{n}_1|=\sqrt{14}$ und $|\vec{n}_2|=\sqrt{6}$.

Daraus ergibt sich: $\cos\alpha=\left|\dfrac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}\right|=\dfrac{3}{2\sqrt{21}} \Rightarrow \alpha\approx 70{,}9°$.

Bemerkung: Sind die Ebenen in Parameterform gegeben, so formt man die Gleichungen in die Normalengleichungen um.

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche, ob sich die Gerade g und die Ebene ε schneiden! Berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S und seine Entfernung vom Nullpunkt!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ ε: $2x-4y+z=16$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\-3\\1\end{pmatrix}$ ε: $5x-y+3z=12$

c) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ε: $-x+y-z+4=0$

d) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ ε: $4x-3y-2z-12=0$

e) g: $\begin{cases}A(-1|1|-2)\\B(1|2|0)\end{cases}$ ε: $-x+5y+3z=18$

f) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ε: $5x+2z=19$

2. Zeige, daß Gerade g und Ebene ε aufeinander senkrecht stehen! Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes zwischen g und ε!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ ε: $x-y+2z=2$

b) g: $\begin{cases}A(1|2|-1)\\B(-2|6|-3)\end{cases}$ ε: $3x-4y+2z=22$

c) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\5\\-3\end{pmatrix}$ ε: $x-5y+3z=-30$

3. Ermittle die Koordinaten des Schnittpunktes zwischen Gerade und Ebene und berechne die Größe des Schnittwinkels!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ ε: $6x+3y-2z=21$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\-4\\12\end{pmatrix}$ ε: $8x-y+4z=-3$

c) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\4\\14\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ ε: $14x+5y-2z=18$

d) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ ε: $5x+2y-z=14$

e) g: $\vec{x}=t\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ ε: $x+y+z=8$

f) g: A(−1|2|0), B(0|5|1) ε: $2x-z=8$

4. Berechne die Koordinaten der Spurpunkte der Geraden g in den drei Koordinatenebenen!

a) g: A(1|0|2), B(0|2|1)

b) g: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$

5. Im Lehrtext wird unter 2. eine Parametergleichung für die Schnittgerade der beiden Ebenen zu $2x-y+3z=4$ und $x+2y-z=1$ ermittelt. Zeige, daß sich durch Berechnung der Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems nach dem Gaußverfahren eine Parametergleichung für dieselbe Gerade ergibt!

6. Zeige, daß sich die Ebenen ε_1 und ε_2 schneiden!

a) ε_1: $-4x+2y+3z=-11$; ε_2: $4x+3y+2z=1$

b) ε_1: $x-2y+3z=4$; ε_2: $2x+y-z=5$

c) ε_1: $2x+y-3z=13$; ε_2: $3x+y+2z=-1$

7. Ermittle für die Ebene ε die Spurgeraden (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) und die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen! Stelle für die ermittelten Spurgeraden je eine Normalengleichung und eine Parametergleichung auf!

a) $3x-2y-4z=12$ **b)** $3x-z=3$ **c)** $y-2x=4$ **d)** $4x-3y+6z=12$

8. Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene ε und die Punkte D und E eine Gerade g. Berechne den Schnittpunkt zwischen g und ε, die Spurpunkte der Geraden und die Spurgeraden der Ebene!

a) $A(3|0|1)$, $B(3|2|2)$, $C(1|2|2)$, $D(5|4|-1)$, $E(5|4|4)$

b) $A(0|2|6)$, $B(4|4|6)$, $C(4|2|2)$, $D(8|-2|10)$, $E(8|8|10)$

9. Berechne die Größe des Winkels zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2!

a) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

b) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-12\\5\end{pmatrix}$

c) $g_1\colon \vec{x}_0=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

10. Berechne Schnittpunkt und Größe des Schnittwinkels der Geraden g_1 und g_2!

a) $g_1\colon 3x-y=24$; $g_2\colon x-2y=3$ **b)** $g_1\colon 12x-5y=9$; $g_2\colon 4x+3y=17$

11. Berechne die Größen der Winkel, die die Gerade g mit den drei Koordinatenebenen einschließt!

a) $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$ **b)** $g\colon \vec{x}=t\begin{pmatrix}5\\-7\\3\end{pmatrix}$ **c)** $g\colon A(1|-1|2)$, $B(5|2|-3)$

12. Ermittle von den Ebenen ε_1 und ε_2 die Spurgeraden, die Schnittgerade und die Größe ihres Schnittwinkels!

a) $\varepsilon_1\colon -x+y+z=4$, $\varepsilon_2\colon x+y+z=8$

b) $\varepsilon_1\colon 3x-3y+z=6$, $\varepsilon_2\colon 3x+3y+z=6$

c) $\varepsilon_1\colon 2y+z=5$, $\varepsilon_2\colon 4x-3z=15$

13. Berechne die Größe des von den Ebenen ε_1 und ε_2 eingeschlossenen Winkels!

a) $\varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) $\varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$\varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

c) $\varepsilon_1\colon \begin{cases}A(3|2|-1),\\B(3|4|1),\\C(4|3|-1)\end{cases}$

$\varepsilon_2\colon \begin{cases}D(5|1|4),\\E(5|-2|3),\\F(6|1|5)\end{cases}$

d) $\varepsilon_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\varepsilon_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

IV. Abstandsaufgaben (Projektionsverfahren)

Am Ende des I. Abschnittes haben wir erläutert, wie man den Abstand eines Punktes P_0 von einer Ebene ε mit Hilfe der Geraden durch den Punkt P_0 bestimmen kann, die auf der Ebene senkrecht steht. Grundsätzlich ist dieses Verfahren auch bei anderen Abstandsaufgaben anwendbar. Mit Hilfe der Hesseform lassen sich viele Abstandsaufgaben aber bedeutend einfacher und schneller lösen.

Beachte, daß wir hier unter dem **„Abstand"** keine Länge, sondern eine nichtnegative Zahl verstehen!

1. Abstand Punkt – Gerade im R_2 bzw. Punkt – Ebene im R_3

Gegeben seien ein Punkt P_1 durch seinen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und eine Gerade g (bzw. eine Ebene ε) durch die Hessesche Normalenform $\vec{x}\cdot\vec{e}_n=\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n=p$. Die Bilder 9.27 und 9.28 zeigen (für den Fall einer Geraden), daß man den gesuchten Abstand d leicht ermitteln kann, wenn man durch den Punkt P_1 eine zu g (bzw. zu ε) parallele Gerade g_1 (bzw. Ebene ε_1) gelegt denkt.

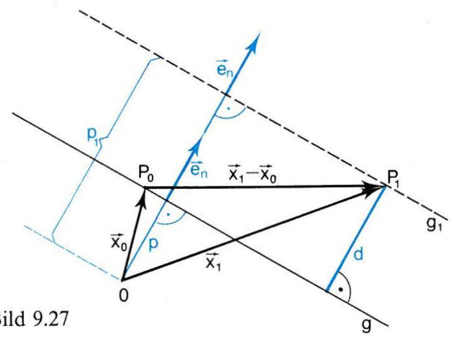


Bild 9.27

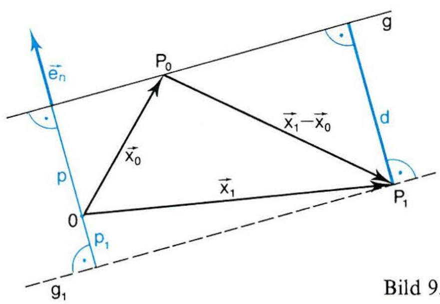


Bild 9.28

Es sind zwei Fälle zu untersuchen, je nachdem, ob der Punkt P_1 – vom Nullpunkt aus gesehen – „jenseits" oder „diesseits" der Geraden (Ebene) liegt.

1) Im Falle von Bild 9.27 gilt:

$$\vec{x}_1\cdot\vec{e}_n=p_1 \quad \text{und} \quad p+d=p_1, \qquad \text{also } d=p_1-p=\vec{x}_1\cdot\vec{e}_n-\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n=(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n.$$

2) Im Falle von Bild 9.28 gilt:

$$\vec{x}_1\cdot(-\vec{e}_n)=p_1 \quad \text{und} \quad d=p+p_1, \qquad \text{also } d=p+p_1=\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n-\vec{x}_1\cdot\vec{e}_n=(\vec{x}_0-\vec{x}_1)\cdot\vec{e}_n.$$

Wir fassen die beiden Fälle zusammen in der Formel:

$$\mathbf{d=|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n|.}$$

Die Gültigkeit dieser Formel kann man auch unmittelbar den Bildern 9.27 und 9.28 entnehmen. Man erhält den Abstand des Punktes P_0 von der Geraden g (bzw. der Ebene ε) nämlich dadurch, daß man den Verbindungsvektor $\vec{x}_1-\vec{x}_0$ in die Normalenrichtung der Geraden (bzw. der Ebene) hineinprojiziert. Diese Projektion ist im Falle von Bild 9.27 unmittelbar gegeben durch das Skalarprodukt $(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n$, weil $|\vec{e}_n|=1$ ist; also gilt: $d=(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n$.
Im Falle von Bild 9.28 hat man die Orientierung der Vektoren zu berücksichtigen; in diesem Falle gilt: $d=-(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n$.

Beide Fälle kann man zusammenfassen in der Formel:

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n|.$$

Bild 9.29 zeigt den Sachverhalt für den Abstand eines Punktes P_0 von einer Ebene ε. Wir nennen dieses Verfahren zur Bestimmung eines Abstandes das **„Projektionsverfahren"**.

Beispiele:

1) Zu berechnen ist der Abstand des Punktes P_1 zu $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Geraden g, die durch die Vektoren $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben ist (Bild 9.30). Es gilt: $|\vec{n}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ und somit $\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ferner ist: $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Also gilt:

$$d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{13}} |-9-2| = \frac{11}{\sqrt{13}} \approx 3{,}05.$$

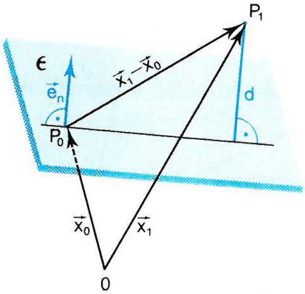


Bild 9.29

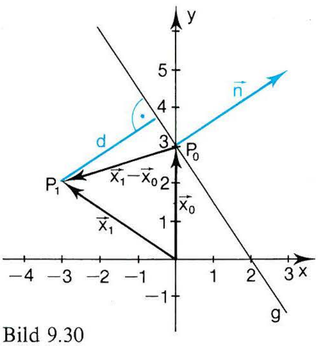


Bild 9.30

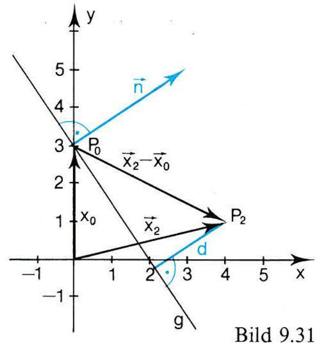


Bild 9.31

2) Wir bestimmen nun den Abstand des Punktes P_2 zu $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ von der gleichen Geraden wie in Beispiel 1) (Bild 9.31). Es gilt: $\vec{x}_2 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich:

$$d = |(\vec{x}_2 - \vec{x}_0) \cdot \vec{e}_n| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{13}} |12-4| = \frac{8}{\sqrt{13}} \approx 2{,}22.$$

3) Zu berechnen ist der Abstand des Punktes P_1 zu $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ von der Ebene ε, die durch die Vektoren $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Es gilt $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ und $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also ist

$$d = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}} |-3-6-6| = \frac{15}{\sqrt{14}} \approx 4{,}01.$$

Bemerkung: Man kann den Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden g (bzw. einer Ebene ε) auch unmittelbar aus der Hesseform gewinnen, wenn man statt $\vec{x}\cdot\vec{e}_n=\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n$ schreibt:

$$\vec{x}\cdot\vec{e}_n-\vec{x}_0\cdot\vec{e}_n=0, \quad \text{also } \vec{x}\cdot\vec{e}_n-p=0.$$

Dabei ist die Orientierung von $\vec{e}_n$ so zu wählen, daß $p>0$ ist.
Setzt man nun in $\vec{x}$ die Koordinaten von P_1 ein, so erhält man – evtl. bis auf das Vorzeichen – bereits den gesuchten Abstand. Für die Zahl q mit

$$q=\vec{x}_1\cdot\vec{e}_n-p$$

sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) Ist $q>0$, so liegt P_1 vom Nullpunkt aus gesehen, „jenseits" der Geraden (bzw. der Ebene) (Bild 9.27) und es gilt: $d=q$;

2) ist $q=0$, so liegt P_1 auf der Geraden (bzw. in der Ebene);

3) ist $q<0$, so liegt P_1, vom Nullpunkt aus gesehen, „diesseits" der Geraden (bzw. der Ebene) (Bild 9.28) und es gilt: $d=-q$,

in jedem Falle also $\mathbf{d=|q|=|\vec{x}_1\cdot\vec{e}_n-p|}$.

Beispiel: Gegeben: $P_1(1|-3|1)$ und ε durch $2x-5y+z=-2$.
Um die Bedingung $p>0$ zu erfüllen, ist die Gleichung mit -1 zu multiplizieren:

$$-2x+5y-z=2;$$

dann ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix}$, also $|\vec{n}|=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$. Die Hesseform der Ebenengleichung lautet also:

$$\frac{1}{\sqrt{30}}(-2x+5y-z-2)=0.$$

Wir setzen die Koordinaten von P_1 in die Gleichung ein und erhalten:

$$\frac{1}{\sqrt{30}}(-2\cdot1+5\cdot(-3)-1-2)=-\frac{20}{\sqrt{30}}<0; \qquad \text{also ist } d=\frac{20}{\sqrt{30}}\approx3{,}65;$$

der Punkt P_1 liegt – vom Nullpunkt aus gesehen – „diesseits" der Ebene.

2. Abstand paralleler Geraden und paralleler Ebenen

Mit dem gleichen Verfahren kann auch der Abstand zweier paralleler Geraden g_1 und g_2 (im R_2) und zweier paralleler Ebenen ε_1 und ε_2 berechnet werden. Man hat jeweils einen Verbindungsvektor zwischen beliebigen Punkten der beiden Geraden (bzw. Ebenen) in die gemeinsame Normalenrichtung der beiden Geraden (bzw. Ebenen) zu projizieren; es gilt:

$$\mathbf{d=|(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{e}_n|}.$$

Beispiel: Gegeben: ε_1 durch $2x-3y+5z=-2$; ε_2 durch $-4x+6y-10z=8$.

Für die Normalenvektoren $\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-4\\6\\-10\end{pmatrix}$ gilt $\vec{n}_2=-2\vec{n}_1$, daher sind die Ebenen parallel.

Es ist $|\vec{n}_1|=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$; also ist $\vec{e}_{n_1}=\frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Ein Punkt P_1 von ε_1 ist gegeben durch $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, ein Punkt P_2 von ε_2 durch $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$.

Es gilt $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ und somit

$$d=|(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{e}_{n_1}|=\left|\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{38}}\right|=\frac{2}{\sqrt{38}}\approx 0{,}324.$$

3. Abstand einer Geraden von einer dazu parallelen Ebene

Beispiel: $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\varepsilon\colon x-y-3z=4$.

Wir weisen die Parallelität von Gerade und Ebene nach, indem wir zeigen, daß der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden auf dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene senkrecht steht:

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}=1+2-3=0.$$

Wir können also auch hier einen beliebigen Verbindungsvektor $\vec{x}_1-\vec{x}_0$ zwischen Ebene und Gerade in die gemeinsame Normalenrichtung projizieren:

$$\mathbf{d=|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n|}\quad \text{(Bild 9.32).}$$

Nun ist $\vec{n}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$, also

$$\vec{e}_n=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

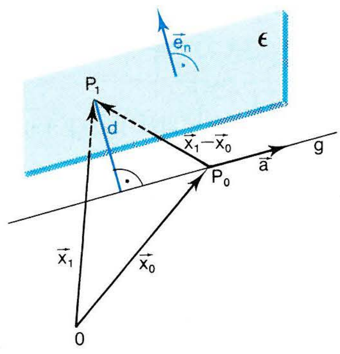


Bild 9.32

Ein Punkt P_1 von ε ist gegeben durch

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Es gilt: $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; daher ist:

$$d=|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n|=\left|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{1+1-3}{\sqrt{11}}\right|=\frac{1}{\sqrt{11}}\approx 0{,}302.$$

Übungen und Aufgaben

1. Berechne jeweils die Entfernungen der folgenden Punkte voneinander!
a) $A(2|-2|1)$, $B(4|-4|2)$ **b)** $C(3|-3|-1)$, $D(4|5|3)$ **c)** $E(5|-1|0)$, $F(7|5|3)$

2. Berechne den Abstand der Punkte A, B und C von der Geraden g!
a) $g\colon\ 3x-4y=20$; $A(6|-3)$, $B(9|-2)$, $C(10|0)$
b) $g\colon\ 24x-7y=100$; $A(10|5)$, $B(4|8)$, $C(0|-5)$

3. Ein Punkt $P_1(x_1|y_1)$ habe von der Geraden g den Abstand d. Berechne die fehlende Koordinate von P_1!
a) $P_1(3|y_1)$; $g\colon 3x+4y=5$; $d=4$ **b)** $P_1(x_1|8)$; $g\colon -6x-8y=-10$; $d=9$
c) $P_1(x_1|-6)$; $g\colon 4x-3y=10$; $d=8$ **d)** $P_1(2|y_1)$; $g\colon -4x+3y=-10$; $d=2$

4. Ermittle die Längen der Höhen im Dreieck ABC mit $A(-7|6)$, $B(-2|-4)$ und $C(7|8)$!

5. Berechne den Abstand des Punktes P_1 von der Ebene ε!
a) $\varepsilon\colon 6x+2y-3z=7$; $P_1(2|5|-2)$ **b)** $\varepsilon\colon 2x-y+2z=9$; $P_1(9|-6|6)$
c) $\varepsilon\colon \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}=9$; $P_1(12|5|1)$ **d)** $\varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; $P_1(8|-1|5)$

6. Welchen Abstand hat der Punkt C von der Geraden durch A und B?
a) $A(7|2)$, $B(21|-5)$, $C(8|9)$ **b)** $A(2|9)$, $B(2|14)$, $C(-1|0)$

7. Die Ortsvektoren $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ bestimmen ein Dreieck $P_1P_2P_3$. Berechne die Längen der Lote, die vom Schwerpunkt S des Dreiecks auf die Dreiecksseiten gefällt werden und die Längen der Höhen des Dreiecks!
a) $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$, $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$; $\vec{x}_3=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

8. Ermittle zeichnerisch diejenigen Geraden durch den Punkt A, die vom Punkt B den Abstand d haben! Stelle die Gleichungen dieser Geraden auf!
a) $A(7|6)$, $B(2|8)$; $d=5$ **b)** $A(-1|2)$, $B(4|-6)$; $d=8$

9. Zeige, daß die Geraden g_1 und g_2 parallel sind! Ermittle ihren Abstand! Bestätige das Ergebnis durch eine Zeichnung!
a) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ **b)** $g_1\colon \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}=17$ **c)** $g_1\colon -2x+3y=9$
$g_2\colon 8x+6y=25$ $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

10. Ermittle Normalengleichungen für die Geraden, die zur Geraden g parallel sind und von ihr den Abstand d haben! Wie viele Lösungen gibt es? Bestimme auch je eine Parametergleichung für die Geraden!
a) $12x+5y=26$; $d=4$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; $d=5$

11. Zeige, daß die Ebenen ε_1 und ε_2 parallel sind! Ermittle ihren Abstand!

a) ε_1: $-16x-2y+8z=-23$

ε_2: $\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

b) ε_1: $-2x+3y+6z=15$

ε_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

c) ε_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

ε_2: $3x-12y+4z=8$

d) ε_1: $2x+2y-z=5$

ε_2: $x=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

12. Prüfe jeweils, ob die Gerade g zur Ebene ε parallel ist und berechne gegebenenfalls den Abstand zwischen Gerade und Ebene!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ε: $6x-2y-3z=10$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-3\\-1\end{pmatrix}$ ε: $x-7y+24z=5$

c) g: $x=\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ ε: $8x-4y-z=11$

d) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ ε: $-x+y+z=-4$

e) g: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ ε: $3x-y+z=-4$

f) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ε: $3x-2y+z=1$

13. Ermittle in dem Tetraeder ABCD die Länge der von D ausgehenden Körperhöhe!

a) A(0|0|0), B(2|1|3), C(2|1|−1), D(1|6|2)

b) A(0|0|0), B(−2|4|2), C(6|4|2), D(4|2|12)

V. Abstandsaufgaben (Lotfußpunktverfahren)

Das Projektionsverfahren ist zur Berechnung von Abständen nur dann geeignet, wenn zu dem betreffenden Gebilde eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung existiert; dies ist z.B. bei Geraden im R_3 nicht der Fall. Daher muß man bei solchen Problemen ein anderes Verfahren anwenden.

1. Abstand Punkt – Gerade im R_3

Gegeben sei ein Punkt P_1 durch den Ortsvektor $\vec{x}_1$ und eine Gerade g durch den Ortsvektor $\vec{x}_0$ und den Richtungsvektor $\vec{a}$ (Bild 9.33).

Man erhält den Abstand des Punktes P_1 von g dadurch, daß man von P_1 das Lot auf g fällt; der Abstand d ist also leicht zu ermitteln, wenn man den Fußpunkt F dieses Lotes kennt; den Ortsvektor zu diesem Lotfußpunkt bezeichnen wir mit $\vec{x}_F$.

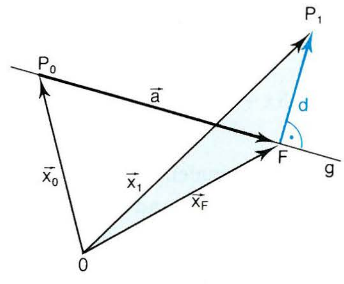


Bild 9.33

Als Bedingung für $\vec{x}_F$ können wir die Tatsache verwenden, daß der Vektor $\vec{d}=\vec{x}_1-\vec{x}_F$ auf der Geraden, also auch auf $\vec{a}$ senkrecht steht: $\vec{d}\cdot\vec{a}=0$. Für den Parameterwert t des Lotfußpunktes gilt: $\vec{x}_F=\vec{x}_0+t\vec{a}$, also $\vec{d}=(\vec{x}_1-\vec{x}_0)-t\vec{a}$ und somit:

$$\begin{aligned}\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \quad &\Rightarrow \quad [(\vec{x}_1-\vec{x}_0)-t\vec{a}]\cdot\vec{a}=0\\ &\Rightarrow \quad (\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{a}=t\vec{a}\cdot\vec{a}\\ &\Rightarrow \quad t=\frac{(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}.\end{aligned}$$

Daraus lassen sich $\vec{x}_F$ und $\vec{d}$ und mithin auch $d=|\vec{d}|$ bestimmen.

Beispiel: Gegeben: $P_1(1|-3|-3)$ und g durch $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}$; $(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=1-12=-11$;

$\vec{a}\cdot\vec{a}=1+9+1=11$. Also ist $t_F=\frac{-11}{11}=-1$.

Der Fußpunkt ist also gegeben durch: $\vec{x}_F=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

Ferner ist $\vec{d}=\vec{x}_1-\vec{x}_F=\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ und $d=|\vec{d}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}\approx 2{,}45$.

2. Abstand paralleler Geraden im R_3

Da parallele Geraden g_1 und g_2 überall denselben Abstand haben, braucht man nur den Abstand eines Punktes auf g_1 oder auf g_2 von der anderen Geraden nach dem unter 1. beschriebenen Verfahren zu bestimmen (Bild 9.34).

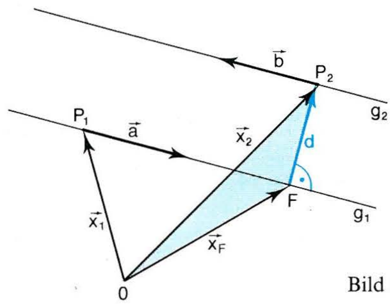


Bild 9.34

3. Abstand windschiefer Geraden

Sind zwei Geraden g und h mit nichtkollinearen Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, so können diese Geraden windschief sein oder sich in einem Punkte schneiden. Da bereits die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt und einer Geraden auf der Geraden senkrecht steht, ist es plausibel, daß eine Strecke nur dann die kürzeste Verbindung zwischen zwei windschiefen Geraden sein kann, wenn sie auf **beiden** Geraden senkrecht steht. Es ist aber nicht von vorneherein sicher, daß es **überhaupt** eine solche Verbindungsstrecke gibt und auch nicht, ob es **nur** eine solche Strecke gibt, die auf **beiden** Geraden senkrecht steht. Wir können aber versuchen, zwei Punkte G auf g und H auf h so zu bestimmen, daß die Strecke GH auf g und auf h senkrecht steht. Es wird sich dann herausstellen, ob es eine solche Strecke gibt und ob sie eindeutig bestimmt ist.

Zwei Geraden g und h seien durch ihre Parametergleichungen gegeben:

$$\vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{x}=\vec{x}_2+s\vec{b} \quad \text{(Bild 9.35).}$$

Die Bedingung für den Verbindungsvektor der beiden Lotfußpunkte G und H

$$\vec{d}=\vec{x}_H-\vec{x}_G$$

lautet: $\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \wedge \vec{d}\cdot\vec{b}=0.$

Für die Parameterwerte r und s der beiden Lotfußpunkte gilt dann:

$$\vec{x}_G=\vec{x}_1+r\vec{a} \quad \text{und} \quad \vec{x}_H=\vec{x}_2+s\vec{b}$$

und somit $\vec{d}=\vec{x}_H-\vec{x}_G=\vec{x}_2-\vec{x}_1-r\vec{a}+s\vec{b}.$

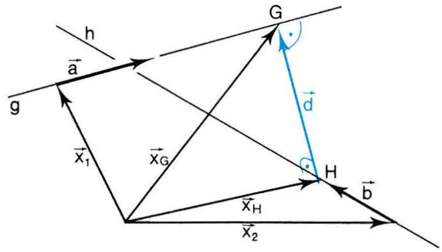


Bild 9.35

Aus $\vec{d}\cdot\vec{a}=0 \wedge \vec{d}\cdot\vec{b}=0$ ergibt sich also:

$$(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{a}-r(\vec{a}\cdot\vec{a})+s(\vec{b}\cdot\vec{a})=0$$
$$\wedge\ (\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{b}-r(\vec{a}\cdot\vec{b})+s(\vec{b}\cdot\vec{b})=0.$$

Man kann zeigen, daß dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung für r und für s hat, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind. Auf einen Beweis wollen wir hier verzichten und uns mit einem **Beispiel** begnügen.

Gegeben: g durch $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ und h durch $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}$;

$(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=13+14-3=24$; $(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=26-21=5$;

$\vec{a}\cdot\vec{a}=1+4+9=14$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=2-6=-4$; $\vec{b}\cdot\vec{b}=4+9=13.$

Also lautet das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} 24-14r-4s=0 \\ \wedge\ 5+4r+13s=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 7r+2s= & 12 \\ \wedge\ 4r+13s= & -5 \end{array}\right. \begin{array}{|l} \cdot 13 \\ \cdot(-2) \end{array} \begin{array}{|l} \cdot 4 \\ \cdot(-7) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 83r & =166 \\ \wedge\ -83s= & 83 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=2 \\ \wedge\ s=-1 \end{array}\right\}$$

Die Fußpunkte sind also gegeben durch:

$$\vec{x}_G=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_H=\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\7\\3\end{pmatrix}.$$

Somit gilt: $\vec{d}=\vec{x}_H-\vec{x}_G=\begin{pmatrix}12\\7\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}$ und $d=|\vec{d}|=\sqrt{81+36+49}=\sqrt{166}\approx 12{,}9.$

Bemerkung: Wenn man vergessen hat, die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf Kollinearität zu überprüfen und das geschilderte Verfahren auf parallele Geraden anwendet, so kann man trotzdem zum Ziel kommen.

Beispiel:

Für $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$ gilt: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\4\\-3\end{pmatrix}$;

$(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{a}=-12$; $(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\vec{b}=24$; $\vec{a}\cdot\vec{a}=6$; $\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$ und $\vec{b}\cdot\vec{b}=24$.

Das Gleichungssystem lautet also:

$$\left\{\begin{aligned} &-12-6r-12s=0\\ \wedge\ &24+12r+24s=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} r+2s=-2\\ r+2s=-2\end{aligned}\right\}.$$

Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar; eine mögliche Lösung ist z.B. $r=0 \wedge s=-1$. Für diese beiden Parameterwerte ergibt sich:

$$\vec{x}_G=\vec{x}_1+0\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix};\quad \vec{x}_H=\vec{x}_2-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Aus $\vec{d}=\vec{x}_H-\vec{x}_G=\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ergibt sich: $d=|\vec{d}|=\sqrt{2}$.

Ermittle weitere Lösungen des obigen Gleichungssystems und zeige, daß man dann ebenfalls zum gleichen Ergebnis kommt (Aufgabe 5)!

Übungen und Aufgaben

1. Berechne den Abstand des Punktes P_1 von der Geraden g!

a) $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}6\\-5\\0\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ **b)** $P_1(3|0|-4)$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\-1\\12\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ **d)** $P_1(5|0|-1)$; g: $\vec{x}=t\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$

2. Gegeben ist ein Dreieck ABC. Berechne die Längen seiner Höhen!

a) $A(1|0|1)$, $B(2|0|1)$, $C(4|-1|3)$ **b)** $A(2|3|-7)$, $B(4|3|-5)$, $C(1|0|-2)$

3. Von einem Rhombus ABCD sind die Punkte A, B und C gegeben. Ermittle die Koordinaten des vierten Punktes D! Berechne die Längen seiner Diagonalen und der Lote von den Endpunkten auf die gegenüberliegenden Seiten!

a) $A(4|0|0)$, $B(0|5|1)$, $C(4|10|0)$ **b)** $A(1|0|1)$, $B(4|0|1)$, $C(3|2|2)$

4. Berechne den Abstand der Geraden g_1 und g_2!

a) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-6\\-3\end{pmatrix}$

b) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$

c) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=s\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$

d) g_1: $A_1(2|-1|3)$, $B_1(5|0|7)$
g_2: $A_2(-1|-4|0)$, $B_2(2|-3|4)$

e) g_1: $A_1(4|1|1)$, $B_1(3|-2|2)$
g_2: $A_2(0|-2|-2)$, $B_2(1|-3|-4)$

f) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

g) $g_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\6\\5\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

h) $g_1: \vec{x}=t\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

5. Ermittle weitere Lösungen des Gleichungssystems von Seite 177 und mit Hilfe dieser Lösungen den Abstand der beiden Geraden g und h!

VI. Übergreifende Aufgaben

1. Durch die drei Punkte $A(3|2|3)$, $B(2|4|5)$, $C(0|5|3)$ sei ein Parallelogramm mit den Seiten AB und BC festgelegt.
a) Ermittle den vierten Eckpunkt D des Parallelogramms!
b) Berechne die Längen der Seiten und die Größen der Innenwinkel!
c) Ermittle den Diagonalenschnittpunkt und die Längen der Diagonalen!
d) Berechne die Flächenmaßzahl des Parallelogramms!

2. Das Dreieck ABC sei durch $A(-1|0)$, $B(4|-1)$, $C(1|5)$ gegeben.
a) Berechne den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden!
b) Berechne den Schnittpunkt der Höhen!
c) Berechne den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten!
d) Zeige, daß die genannten Schnittpunkte auf einer Geraden liegen und ermittle eine Parametergleichung dieser Geraden!

3. a) Berechne im Dreieck ABC mit $A(3|0|0)$, $B(0|3|0)$ und $C(0|0|4)$ die Seitenlängen und die Größen der Innenwinkel! Welche besondere Eigenschaft hat das Dreieck?
b) Beweise vektoriell die beiden folgenden Sätze über gleichschenklige Dreiecke!
1) Die Seitenhalbierende durch C steht auf der Grundseite AB senkrecht.
2) Die beiden Basiswinkel $\sphericalangle\alpha$ und $\sphericalangle\beta$ sind gleich groß.
c) Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene ε, in der die Punkte A, B und C aus Aufgabenteil a) liegen! Ermittle ferner von zwei Mittelsenkrechten des Dreiecks Geradengleichungen und berechne ihren Schnittpunkt!

4. a) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1-p\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\p\\8\end{pmatrix}$. Ermittle die Werte von $p\in\mathbb{R}$, für die $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind!

b) Zeige, daß die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für alle Werte von $p\in\mathbb{R}$ linear unabhängig sind!

c) Berechne $p\in\mathbb{R}$ so, daß die beiden Vektoren $\vec{d}=\begin{pmatrix}p\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{f}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2-p\end{pmatrix}$ orthogonal sind! Wie groß ist der Winkel zwischen $\vec{d}$ und $\vec{f}$ für $p=-1$?

d) Bestimme einen Vektor $\vec{g}$, der auf den beiden Vektoren von c) senkrecht steht, und entwickele aus $\vec{d}$, $\vec{f}$ und $\vec{g}$ eine orthonormierte Basis!

5. a) Zeige, daß die drei Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}10\\11\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\2\\14\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind! Zeige: Der Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}14\\7\\4\end{pmatrix}$ läßt sich aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear erzeugen!

b) Zeige, daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ paarweise zueinander orthogonal sind und entwickle aus ihnen eine orthonormierte Basis!

c) Bestimme die Werte $p, q\in\mathbb{R}$ so, daß die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ mit $\vec{f}=\vec{a}+p\vec{b}$ und $\vec{g}=\vec{a}+q\vec{b}$ zueinander orthogonal sind! Welche Beziehung besteht dann zwischen p und q?

d) Welche Bedingung müssen p und q erfüllen, damit die Vektoren $\vec{f}+\vec{g}$ und $\vec{f}-\vec{g}$ zueinander orthogonal sind?

6. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\7\\-4\end{pmatrix}$ und $\vec{c}(p)=\begin{pmatrix}1\\4\\p\end{pmatrix}$, $p\in\mathbb{R}$.

a) Zeige, daß der Vektor $\vec{c}(p)$ für alle $p\in\mathbb{R}$ zu $\vec{a}$ orthogonal ist!
Für welche Werte von p läßt sich $\vec{c}(p)$ aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear erzeugen?

b) V_2' sei die Menge aller Vektoren aus V_3, die orthogonal zum Vektor $\vec{a}$ sind. Zeige, daß sich jeder Vektor aus V_2' durch die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ linear erzeugen läßt!

c) Zeige: Die Menge aller Vektoren $\vec{x}\in V_3$, für die $|\vec{x}-\vec{a}|=|\vec{x}+\vec{a}|$ gilt, ist V_2'!

7. Für die Skalarprodukte der Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in V_3$ gelte: $\vec{a}\cdot\vec{a}=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=1$, und $\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{c}=2$.

a) Ermittle die Größen der Winkel zwischen je zwei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$!
Berechne $r, s\in\mathbb{R}$ so, daß der Vektor $\vec{d}=r\vec{a}+3\vec{b}+s\vec{c}$ sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal ist! Zeige, wie $\vec{c}$ aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear erzeugt wird!

b) Es seien $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme $\vec{a}$ so, daß alle Skalarprodukte die oben angegebenen Werte haben!
Untersuche, ob $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind!

c) Für welche $k\in\mathbb{R}$ hat der Vektor $\vec{f}(k)=\vec{a}+2\vec{b}+k\vec{c}$ den Betrag $\sqrt{3}$? Kann $|\vec{f}(k)|$ jede positive reelle Zahl sein?

d) Für welche $k\in\mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{f}(k)$ und $\vec{g}(k)=(k-1)\vec{a}+k\vec{b}+(k+2)\vec{c}$ linear abhängig?

8. Gegeben seien ein Punkt $P_1(1|-3|-3)$, eine Gerade g durch $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, ferner die Ebene ε_1 zu $x-3y-z=5$.

a) Bestimme die gegenseitige Lage von Gerade g und Ebene ε_1!

b) Liegt der Punkt P_1 in der Ebene ε_1? Ermittle ggf. eine Normalengleichung der Ebene ε_2, die durch P_1 geht und parallel zu ε_1 liegt!

c) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε_3, in der die Gerade g und der Punkt P_1 liegen!

d) Bestimme die gegenseitigen Lagen der Ebene ε_3 zu den Ebenen ε_1 und ε_2!

9. a) Ermittle die gegenseitige Lage der Geraden g_1 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ und der Geraden g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$.

b) Ermittle den Schnittwinkel der beiden Geraden!

c) Ermittle Parametergleichung und Normalengleichung der Ebene ε, in der die Geraden g_1 und g_2 liegen!

d) Ermittle je eine Parametergleichung der in der Ebene ε gelegenen Winkelhalbierenden zu den Geraden g_1 und g_2!

10. Beweise: Sind $\vec{x}\cdot\vec{n}_1=p_1$ und $\vec{x}\cdot\vec{n}_2=p_2$ die Hesse-Gleichungen für zwei nicht-parallele Geraden, so sind $\vec{x}\cdot(\vec{n}_1+\vec{n}_2)=p_1+p_2$ und $\vec{x}\cdot(\vec{n}_1-\vec{n}_2)=p_1-p_2$ die Gleichungen für die Winkelhalbierenden der beiden Geraden!

11. Die Gerade g sei durch die beiden Punkte $P(9|5|4)$ und $Q(2|1|0)$ bestimmt, die Ebene ε durch $2x-2y+z=6$.

a) Ermittle die Länge und den Lotfußpunkt des vom Nullpunkt auf die Ebene ε gefällten Lotes!

b) Ermittle Schnittpunkt und Größe des Schnittwinkels zwischen der Geraden g und der Ebene ε!

c) Ermittle die Punkte auf g, welche von ε den Abstand $d=4$ haben!

12. Das Viereck ABCD sei durch die Punkte $A(5|6|1)$, $B(-3|10|5)$, $C(1|4|7)$ und $D(9|0|3)$ gegeben.

a) Bestätige, daß die vier Punkte in einer Ebene liegen! Um welche Art Viereck handelt es sich?

b) Ermittle Gleichungen der Ebene, in der das Viereck liegt, in Parameter- und in Normalenform!

c) Ermittle den Abstand der Ebene vom Nullpunkt!

d) Ermittle die Entfernung des Diagonalenschnittpunktes im Viereck ABCD vom Nullpunkt!

e) Berechne die Entfernung dieses Diagonalenschnittpunktes vom Fußpunkt des Lotes, welches vom Nullpunkt auf die Ebene gefällt wird!

f) Ermittle eine Parametergleichung derjenigen Geraden, die durch C geht und von den Punkten A und B den gleichen Abstand hat!

13. a) Ermittle im Dreieck ABC mit A(0|2|1), B(2|4|2), C(4|5|1) eine Parametergleichung der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle\alpha$!
b) Bringe diese Winkelhalbierende mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite zum Schnitt!
c) Bestätige den Satz: Im Dreieck teilt eine Winkelhalbierende die Gegenseite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten!

14. Gegeben seien die vier Punkte A(4|0|0), B(1|6|4), C(7|−2|−2) und D(8|−4|13).
a) Berechne den Abstand des Punktes D zu der durch A, B und C bestimmten Ebene ε!
b) Ermittle den Fußpunkt des Lotes von D auf ε!
c) Ermittle die Größe des Schnittwinkels zwischen ε und der x-y-Ebene!

15. Gegeben seien $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\b_3\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ mit $b_3, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

a) Welche Beziehung besteht zwischen b_3, c_2 und c_3, so daß die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind?
b) Berechne b_3, c_2 und c_3 so, daß je zwei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zueinander orthogonal sind!
c) Ermittle von der Ebene ε zu $\vec{x}=r\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ eine Normalengleichung und berechne den Abstand des Punktes P(3|6|−3) von der Ebene ε!
d) P′ sei Spiegelpunkt von P bezüglich der Ebene ε. Ermittle die Koordinaten von P′ und die Entfernung der Punkte P′ und P!

16. a) Zeige, daß die beiden Ebenen ε_1 zu $x+z+1=0$ und ε_2 zu $x+y-z+3=0$ zueinander orthogonal sind!
b) Ermittle eine Parametergleichung der Schnittgeraden g!
c) Zeige, daß P(−2|0|1) auf dieser Schnittgeraden liegt!
d) Weise nach, daß die Gerade g in allen Ebenen der Schar
$\varepsilon(t)$ zu $(t+1)x+y+(t-1)z+t+3=0$ mit $t\in\mathbb{R}$ liegt!
e) Welche Bedingung müssen zwei Parameterwerte t_1 und t_2 erfüllen, damit die Ebenen $\varepsilon(t_1)$ und $\varepsilon(t_2)$ zueinander senkrecht stehen?
f) Welche Ebenen $\varepsilon(t)$ haben vom Nullpunkt den Abstand $\sqrt{3}$?
g) Zeige, daß der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}1-t\\1-t\\2+t\end{pmatrix}$ mit $t\in\mathbb{R}$ ein Spannvektor der Ebene $\varepsilon(t)$ ist und daß der Vektor $\vec{a}$ und der Richtungsvektor der Schnittgeraden g linear unabhängig sind!
h) Die Gerade h(t) liege in der Ebene $\varepsilon(t)$, stehe senkrecht auf der Geraden g und verlaufe durch den Punkt P(−2|0|1).
Ermittle eine Parametergleichung von h(t)!
i) Es sei $Q(t)=(1-2t|-2t|4+2t)$.
Zeige, daß die Dreiecke mit den Eckpunkten P, Q(t) und Q(t+1) eine Seite besitzen, die eine von t unabhängige Länge hat! Bestimme ferner t so, daß die beiden anderen Seiten gleich lang sind!

17. Zeige, daß das durch $A(0|0)$, $B(a|0)$ und $C(\frac{1}{2}a|\frac{1}{2}a\sqrt{3})$ gegebene Dreieck gleichseitig ist! Beweise, daß für jeden Punkt im Innern dieses Dreiecks die Summe seiner Abstände von den drei Dreiecksseiten gleich der Dreieckshöhe ist! Untersuche, ob diese Aussage auch für Punkte auf den Seiten des Dreiecks und für Punkte außerhalb des Dreiecks gilt!

18. Eine Ebene ε und zwei Geradenscharen $g(\alpha)$ und $h(\alpha)$ seien gegeben durch:

$$\varepsilon\colon\ x+2y=3;\quad g(\alpha)\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1+\alpha\\2+\alpha\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\alpha\\1+\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix};\quad h(\alpha)\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1+\alpha\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\quad \text{mit } \alpha\in\mathbb{R}.$$

a) Für welchen Wert von α ist die Gerade $g(\alpha)$ parallel zu ε? Liegt diese Gerade in der Ebene ε?
b) Berechne für alle übrigen Werte $\alpha\in\mathbb{R}$ den Schnittpunkt von ε und $g(\alpha)$! Ermittle den Wert von α, für den $g(\alpha)$ orthogonal zu ε ist!
c) Zeige, daß sich die zum gleichen Wert von α gehörenden Geraden der beiden Scharen schneiden, indem du die Schnittpunkte berechnest!
d) Zeige, daß der Vektor $\begin{pmatrix}2\\\alpha-2\\\alpha+2\end{pmatrix}$ orthogonal ist zu den Richtungsvektoren von $g(\alpha)$ und $h(\alpha)$! Ermittle eine Normalengleichung der Schar von Ebenen $\varepsilon(\alpha)$, in denen die Geraden $g(\alpha)$ und $h(\alpha)$ liegen!
Für welche Zahl α verläuft $\varepsilon(\alpha)$ durch den Nullpunkt?
e) Berechne die Größe des Winkels zwischen den Ebenen ε und $\varepsilon(-2)$! Zeige, daß jeder Punkt der Ebene zu $x=1$ von ε den gleichen Abstand hat wie von $\varepsilon(-2)$!

19. Die Gerade g sei durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\8\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ und die Ebenenschar $\varepsilon(\alpha)$ durch $2x-6y+(4-\alpha)z=-2\alpha$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$ bestimmt.
a) Für welches α ist $\varepsilon(\alpha)$ parallel zu g? In der Schar gibt es eine Ebene, die zu keiner anderen Ebene der Schar orthogonal ist. Ermittle ihre Gleichung!
b) Die Ebene ε^* verlaufe durch $P(1|11|2)$ und parallel zu $\varepsilon(7)$. Berechne den Abstand dieser beiden Ebenen!

20. Eine Ebene ε sei durch die Punkte $P_1(0|-7|-4)$, $P_2(2|1|2)$ und $P_3(-1|-3|5)$ bestimmt. Gegeben seien außerdem $Q(1|4|-1)$ und die Gerade g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.
a) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε und berechne den Abstand des Punktes Q von der Ebene!
b) Ermittle den Spiegelpunkt Q' von Q bezüglich ε!
c) Ermittle den Schnittpunkt zwischen g und ε und die Größe des Schnittwinkels!
d) Berechne die Koordinaten der Punkte auf der z-Achse, von denen aus die Strecke P_1P_2 unter einem rechten Winkel erscheint!

§ 10 Das Vektorprodukt von Vektoren

I. Die Definition des Vektorproduktes

1. In den bisherigen Überlegungen zur analytischen Geometrie haben wir schon mehrfach vor dem Problem gestanden, einen Vektor zu ermitteln, der auf zwei gegebenen Vektoren senkrecht steht.

Beispiele:

1) Wenn eine Ebene durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + r\vec{a} + s\vec{b}$$

gegeben ist, ist es häufig notwendig, aus dieser Gleichung eine Normalenform der Ebenengleichung herzuleiten (vergleiche Seite 125!). Dazu benötigt man einen **Normalenvektor** $\vec{n}$ der Ebene, also einen Vektor, der auf den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht. Dieser Vektor $\vec{n}$ muß also der Bedingung

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \vec{b} \cdot \vec{n} = 0$$

genügen.

2) Wenn die Schnittgerade zweier Ebenen ε_1 und ε_2 zu bestimmen ist, die durch ihre Normalform gegeben sind, dann muß der Richtungsvektor $\vec{a}$ der Schnittgeraden berechnet werden. Dieser Richtungsvektor steht auf den beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der beiden Ebenen senkrecht; es muß also gelten:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{a} = 0 \wedge \vec{n}_2 \cdot \vec{a} = 0.$$

Auf Seite 136 haben wir dieses Problem für ein Beispiel gelöst; wir wollen es nun allgemein angehen.

2. Wir suchen also einen Vektor $\vec{n}$, der auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht. Dabei setzen wir voraus, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind; denn andernfalls wäre die Normalenrichtung nicht eindeutig bestimmt.
Die Bedingung für einen solchen Normalenvektor $\vec{n}$ lautet:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \wedge \vec{b} \cdot \vec{n} = 0,$$

also

$$\begin{array}{rl} a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 = 0 & \Big| \cdot (-b_3) \\ \wedge\ b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 = 0 & \Big| \cdot a_3 \end{array}$$

Da es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit drei Variablen handelt, kann die Lösung nicht eindeutig sein. Dies ist auch aus geometrischen Gründen klar, weil lediglich die Richtung, nicht aber die Länge und die Orientierung des Normalenvektors $\vec{n}$ festgelegt sind.

Wir eliminieren zunächst die Variable n_3 mit Hilfe der oben angegebenen Faktoren $-b_3$ und a_3; wir erhalten die Gleichung

$$(-a_1 b_3 + a_3 b_1) n_1 + (-a_2 b_3 + a_3 b_2) n_2 = 0,$$

also $$(a_3 b_1 - a_1 b_3) n_1 = (a_2 b_3 - a_3 b_2) n_2.$$

Diese Gleichung können wir sehr einfach dadurch erfüllen, daß wir für n_1 und für n_2 – mit einem beliebigen Faktor $k \neq 0$ – setzen:

$$n_1 = k \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad \text{und} \quad n_2 = k \cdot (a_3 b_1 - a_1 b_3).$$

Begründe dies (Aufgabe 1a)! Zur Ermittlung des zugehörigen Wertes von n_3 setzen wir die Ausdrücke für n_1 und n_2 z.B. in die erste Gleichung des Systems ein:

$$\begin{aligned} a_3 n_3 &= -(a_1 n_1 + a_2 n_2) \\ &= -k(a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_1 a_2 b_3) \\ &= -k a_3(-a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= k a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich (für $a_3 \neq 0$): $n_3 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Durch Einsetzen in die beiden Gleichungen des Systems kann man bestätigen, daß n_1, n_2 und n_3 in jedem Fall das Gleichungssystem erfüllen, auch wenn $a_3 = 0$ ist (Aufgabe 1b). Somit erhalten wir:

$$\vec{n} = k \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Die Zahl k bestimmt mit ihrem Betrag die Länge und mit ihrem Vorzeichen die Orientierung des Normalenvektors $\vec{n}$.
Für $k > 0$ bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{n}$ (in **dieser** Reihenfolge!) ein „Rechtssystem"; für $k < 0$ bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{n}$ ein „Linkssystem". Vergleiche Aufgabe 2!

3. Es liegt nun nahe, unter allen Normalenvektoren $\vec{n}$ denjenigen auszuwählen, der durch den Faktor $k = 1$ bestimmt ist. Diesen Vektor definieren wir als Ergebnisvektor einer neuen Verknüpfung von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Weil das Ergebnis ein **Vektor** ist, nennt man diese Verknüpfung die **„Vektormultiplikation"**; man bezeichnet dieses **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit

„$\vec{a} \times \vec{b}$", gelesen **„Vektor a Kreuz Vektor b"**.

Wir definieren:

D 10.1 Unter dem „Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$" versteht man den Vektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

4. Bei der Berechnung der Koordinaten des Vektorproduktes kann man nach der folgenden Merkregel verfahren. Jede Koordinate von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist eine Differenz.

1) Beim **Minuenden** hat man jeweils die **„zyklische"** Reihenfolge der Zahlen 1, 2, 3 zu beachten:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, bend right] & \\ 2 \arrow[rr, bend right] & & 3 \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

, nämlich

in der 1. Koordinate: $a_2 b_3$,

in der 2. Koordinate: $a_3 b_1$,

in der 3. Koordinate: $a_1 b_2$.

2) Im **Subtrahenden** treten die gleichen Indizes wie im Minuenden in vertauschter Reihenfolge auf, also:

in der 1. Koordinate: $a_3 b_2$,

in der 2. Koordinate: $a_1 b_3$,

in der 3. Koordinate: $a_2 b_1$.

Außer dem Zyklus (1, 2, 3) hat man sich also zu merken: **„Vertauschen und Subtrahieren".**

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 \\ -3 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 \\ -2 \cdot 2 - \ 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

5. Wir haben das Vektorprodukt – im Gegensatz zum Skalarprodukt – nicht geometrisch, sondern mit Hilfe der Koordinaten der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definiert. Daher haben wir uns klarzumachen, welche geometrische Bedeutung der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ hat. Wir kennen bereits die Richtung und die Orientierung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$: er steht auf $\vec{a}$ und auf $\vec{b}$ senkrecht, und die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden (in dieser Reihenfolge!) ein Rechtssystem. Wir wissen aber noch nichts über den Betrag, die Länge des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$.
Um Quadratwurzeln zu vermeiden, berechnen wir zunächst nicht $|\vec{a} \times \vec{b}|$, sondern $|\vec{a} \times \vec{b}|^2$.

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (a_2 b_3)^2 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + (a_3 b_2)^2 \\ &\quad + (a_3 b_1)^2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 + (a_1 b_3)^2 \\ &\quad + (a_1 b_2)^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + (a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

Es liegt nahe, hier die „fehlenden" Quadrate $(a_1 b_1)^2$, $(a_2 b_2)^2$ und $(a_3 b_3)^2$ hinzuzuaddieren und wieder zu subtrahieren; außerdem ordnen wir die Quadrate nach den Indizes und erhalten:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_1 b_1)^2 + (a_1 b_2)^2 + (a_1 b_3)^2 \\ &\quad + (a_2 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + (a_2 b_3)^2 \\ &\quad + (a_3 b_1)^2 + (a_3 b_2)^2 + (a_3 b_3)^2 \\ &\quad - [(a_1 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + (a_3 b_3)^2 + 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + 2 a_2 a_3 b_2 b_3 + 2 a_1 a_3 b_1 b_3]. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die folgende Umformung versteht man leichter, wenn man sie „rückwärts" durchführt, wenn man also die Produkte der folgenden Zeile wieder ausmultipliziert.

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}_{|\vec{a}|^2} \cdot \underbrace{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}_{|\vec{b}|^2} - \underbrace{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2}_{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 \cos^2 \alpha \\ &= |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) \\ &= |\vec{a}|^2 \, |\vec{b}|^2 \sin^2 \alpha = (|\vec{a}| \, |\vec{b}| \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Somit haben wir erhalten:

$$|a \times b|^2 = (|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha)^2.$$

Von $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$ haben wir nun auf $|\vec{a}\times\vec{b}|$ zu schließen und dabei zu berücksichtigen, daß $|\vec{a}\times\vec{b}|$ stets eine nichtnegative Zahl ist.
Nun gilt für die Größe α eines Winkels zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in jedem Fall

$$0 \leq \alpha \leq 180°,$$

also $\sin\alpha \geq 0$.
Somit muß gelten:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha.$$

6. Wir fassen zusammen:

S 10.1 Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ ist $\vec{a}\times\vec{b}$ derjenige Vektor, für den gilt:

1) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\alpha$,

2) $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}$ und

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden ein Rechtssystem.

Dabei bezeichnet α die Größe des (nicht überstumpfen) Winkels, den $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einschließen (Bild 10.1).

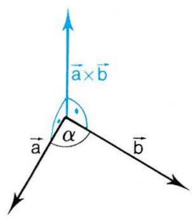


Bild 10.1

Beachte: Bei der Herleitung der Koordinatendarstellung des Vektorproduktes haben wir vorausgesetzt, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **nicht** kollinear sind. Diese Einschränkung haben wir in D 10.1 **nicht** aufgenommen.
Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, gilt $\alpha = 0°$ oder $\alpha = 180°$; in beiden Fällen ist $\sin\alpha = 0$; daher ist dann $|\vec{a}\times\vec{b}| = 0$ und somit $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.
Da wir dem Nullvektor jede Richtung und jede Orientierung zugeordnet haben, behalten die Punkte 1) und 2) in Satz S 10.1 auch für den Fall kollinearer Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ihre Gültigkeit. Für den Sonderfall $\vec{b} = \vec{a}$ erhält man den Satz

S 10.2 Für alle $\vec{a} \in V_3$ gilt: $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$.

7. Gilt umgekehrt $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, also $|\vec{a}\times\vec{b}| = 0$, so bedeutet dies nach Satz S 10.1:

$$|\vec{a}| = 0 \vee |\vec{b}| = 0 \vee \sin\alpha = 0, \quad \text{also } \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Damit ist gezeigt:

S 10.3 Gilt für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ die Beziehung $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, so sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear.

8. Wir können den Betrag eines Vektorprodukts auch geometrisch deuten. Es handelt sich nämlich um die Flächenmaßzahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden (Bilder 10.2 und 10.3).

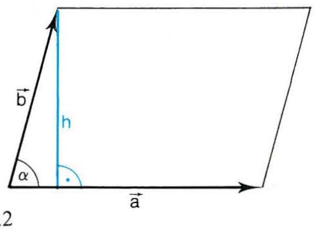


Bild 10.2

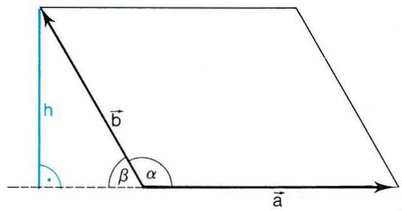


Bild 10.3

1) Gilt $0 < \alpha \leq 90°$ (Bild 10.2), so gilt für die Höhe h des Parallelogramms unmittelbar:

$$h = |\vec{b}| \sin \alpha.$$

2) Gilt $90° < \alpha < 180°$ (Bild 10.3), so gilt für die Höhe h des Parallelogramms:

$$h = |\vec{b}| \sin \beta = |\vec{b}| \sin(180° - \alpha) = |\vec{b}| \sin \alpha.$$

In beiden Fällen gilt also für die Flächenmaßzahl des Parallelogramms:

$$A(P) = |\vec{a}|\, h = |\vec{a}|\, |\vec{b}| \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Bemerkung: Ist $\alpha = 0°$ oder $\alpha = 180°$, so ist $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$ und auch $A(P) = 0$.

9. Mit Hilfe des Vektorproduktes kann man also den **Flächeninhalt von Parallelogrammen und von Dreiecken** bestimmen.

Beispiele:

1) Ein Parallelogramm wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Also: $A(P) = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

2) Die Eckpunkte eines Dreiecks (Bild 10.4) sind gegeben durch die Ortsvektoren

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ (Bild 10.4).}$$

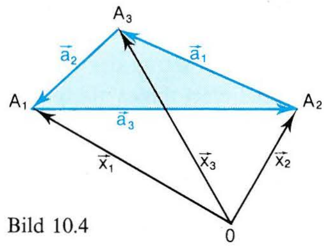


Bild 10.4

Für die drei Seitenvektoren des Dreiecks gilt dann:

$$\vec{a}_1 = \vec{x}_3 - \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$\vec{a}_2 = \vec{x}_1 - \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt: $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Somit ergibt sich: $A = \frac{1}{2}|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \frac{1}{2}\sqrt{49+225+81} = \frac{1}{2}\sqrt{355} \approx 9{,}42$.

Probe: $\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$.

10. Auch das Vektorprodukt gestattet eine Reihe von **physikalischen** Anwendungen. Ein wichtiges Beispiel ist der Begriff des **„Drehmomentes“**.
Man nennt einen Körper, der um eine Achse drehbar ist, einen **„Hebel“**. Greift eine Kraft $\vec{F}$ an einem Hebel an, so ist die physikalische Drehwirkung dieser Kraft vom sogenannten **„Hebelarm“** h abhängig. Im einfachsten Fall (Bild 10.5) ist der Hebelarm der Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Achse. In diesem Fall definiert man als Drehmoment M:

$$M = h\,|\vec{F}|.$$

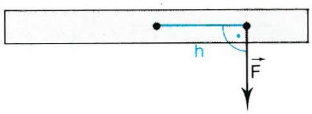


Bild 10.5

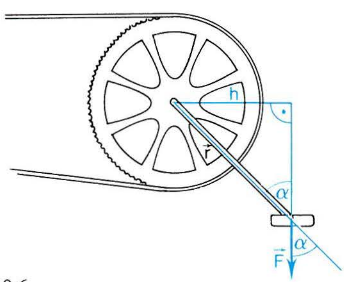


Bild 10.6

Im allgemeinen Fall (Bild 10.6) ist der Hebelarm h der Abstand der Achse vor der **Wirkungslinie** der Kraft. In diesem Fall gilt:

$$h = |\vec{r}| \sin \alpha.$$

Dabei bezeichnet $\vec{r}$ den Vektor von der Achse zum Angriffspunkt der Kraft und α die Größe des (nicht überstumpfen) Winkels zwischen $\vec{r}$ und $\vec{F}$. In diesem Falle gilt also:

$$M = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin \alpha.$$

Dies ist der Betrag des Vektorproduktes $\vec{r} \times \vec{F}$: $M = |\vec{r} \times \vec{F}|$.
Man definiert daher als **vektorielles Drehmoment:**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Greifen an einem Hebel mehrere Kräfte an, so erhält man das Gesamtdrehmoment durch vektorielle Addition der Drehmomente der einzelnen Kräfte.
Bemerkung: Wegen dieser physikalischen Anwendung des Vektorproduktes wird es gelegentlich auch **„Momentenprodukt“** genannt.

Übungen und Aufgaben

1. a) Bestätige und begründe, daß die Ansätze

$$n_1 = k(a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad \text{und} \quad n_2 = k(a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

für beliebiges $k \in \mathbb{R}^{+0}$ die Gleichung $(-a_1 b_3 + a_3 b_1) n_1 + (-a_2 b_3 + a_3 b_2) n_2 = 0$ erfüllen!

b) Bestätige und begründe ferner, daß die Ansätze für n_1, n_2 und $n_3 = k(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ auch im Falle $a_3 = 0$ das Gleichungssystem auf Seite 183 unter 2. erfüllen!

2. Um zu zeigen, daß drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ stets ein Rechtssystem bilden, wenn $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ ist, kann man sich die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch zwei Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ ersetzt denken, die mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Betrag und in der Größe des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen, wobei $\vec{c}$ in Richtung der positiven x-Achse weist und $\vec{d}$ in der x-y-Ebene liegt.

Begründe: Ist dann $d_2 > 0$ $(d_2 < 0)$, so weist $\vec{c} \times \vec{d}$ in Richtung der positiven (negativen) z-Achse. Zeige, daß $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{c} \times \vec{d}$ und mithin auch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ in beiden Fällen ein Rechtssystem bilden! Beachte, daß bei Anwendung der „Korkenzieherregel" (Seite 15) der Korkenzieher über dem **kleinsten** Winkel von $\vec{c}$ nach $\vec{d}$ gedreht werden muß!

3. a) Bestätige unmittelbar aus der Definition des Vektorproduktes D 10.1, daß gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

d) Beweise den Sachverhalt allgemein für $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$!

4. Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Ermittle alle neun Vektorprodukte $\vec{e}_i \times \vec{e}_k$ für $i, k \in \{1, 2, 3\}$ und deute die einzelnen Ergebnisse geometrisch!

6. Ermittle mit Hilfe des Vektorprodukts die Größen der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Aufgabe 4 eingeschlossenen (nicht überstumpfen) Winkel! Kontrolliere die Ergebnisse mit Hilfe der Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$!

7. Berechne die Flächenmaßzahl des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms und die Größe des von ihnen eingeschlossenen nicht überstumpfen Winkels!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

8. Für die Punkte A, B und C seien $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ Vertreter der Vektoren $\vec{c}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Berechne $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ und $\vec{c}\times\vec{a}$! Deute die Ergebnisse geometrisch! Berechne ferner $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, die Größen der Innenwinkel sowie die Flächenmaßzahl des Dreiecks ABC!
a) $A(1|2|0)$, $B(3|-1|0)$, $C(-2|5|0)$ **b)** $A(1|2|2)$, $B(2|1|1)$, $C(1|4|-1)$

9. Ermittle einen Vektor $\vec{x}$, für den $\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$ ist!

a) $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$

10. Beweise aus der Darstellung des Vektorproduktes nach Satz S 10.1, daß für alle Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in V_3$ gilt: $(\vec{a}\times\vec{b})^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$!

11. Beweise unmittelbar aus der Definition des Vektorproduktes D 10.1 die folgenden Sätze!
a) Zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in V_3$ sind kollinear genau dann, wenn gilt: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
b) Zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in V_3$ sind orthogonal genau dann, wenn gilt: $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

12. Unter welchen Bedingungen gilt: **a)** $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{0}$; **b)** $|\vec{a}\times\vec{b}|=\vec{a}\cdot\vec{b}$?

II. Die Gesetze des Vektorproduktes

1. Aus der Definition D 10.1 lassen sich die Gesetze für das Vektorprodukt rechnerisch grundsätzlich leicht herleiten. Allerdings sind die durchzuführenden Rechnungen manchmal etwas umfangreich.
Da beim Vektorprodukt – im Gegensatz zum Skalarprodukt – jedem Paar von Vektoren $(\vec{a}|\vec{b})$ ein Vektor $\vec{c}$ zugeordnet wird, ist es sinnvoll zu fragen, ob für das Vektorprodukt die Gruppengesetze gelten.

2. Vertauscht man in $\vec{a}\times\vec{b}$ die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so bilden $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{b}\times\vec{a}$ ein Linkssystem. Daraus ergibt sich bereits, daß für das Vektorprodukt das Kommutativgesetz **nicht** gilt. Statt dessen gilt das **„Alternativgesetz"**:

S 10.4 Für alle $\vec{a},\vec{b}\in V_3$ gilt: $\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})$.

Der – sehr einfache – Beweis soll in Aufgabe 2 geführt werden.

3. Wenn für das Vektorprodukt das Assoziativgesetz gelten würde, müßte die Gleichung $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ allgemeingültig sein. Dies läßt sich an einfachen Beispielen leicht widerlegen (Aufgabe 8).
Da $\vec{a}\times\vec{b}$ nach Satz S 10.1 sowohl auf $\vec{a}$ wie auf $\vec{b}$ senkrecht steht und weil – außer dem Nullvektor – kein Vektor auf sich selbst senkrecht steht, kann es beim Vektorprodukt auch kein neutrales Element geben. Es gilt also weder das Neutralitäts- noch das Inversitätsgesetz.

4. Bei der Suche nach weiteren Gesetzen lassen wir uns von den Gesetzen leiten, die wir beim Skalarprodukt kennengelernt haben.
Multipliziert man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit zwei Zahlen r und s, so ergibt sich für das Vektorprodukt:

$$(r\vec{a}) \times (s\vec{b}) = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} sb_1 \\ sb_2 \\ sb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ra_2)(sb_3) - (ra_3)(sb_2) \\ (ra_3)(sb_1) - (ra_1)(sb_3) \\ (ra_1)(sb_2) - (ra_2)(sb_1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} rs(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\ rs(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ rr(a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{pmatrix} = rs \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = rs(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Es gilt also der Satz

S 10.5 **Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $(r\vec{a}) \times (s\vec{b}) = rs(\vec{a} \times \vec{b})$.**

Für den Sonderfall $s=1$ ergibt sich aus Satz S 10.5:

S 10.6 **Für alle $r \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $(r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b})$.**

Man spricht bei diesem Satz gelegentlich vom **„gemischten Assoziativgesetz"**.

5. Schließlich gilt noch das **Distributivgesetz:**

S 10.7 **Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.**

Der Beweis soll in Aufgabe 10 geführt werden.

Übungen und Aufgaben

1. Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$!

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Beweise das „Alternativgesetz" des Vektorproduktes (S 10.4)
a) unmittelbar aus der Definition D 10.1, **b)** aus Satz 10.1 (beachte Bild 10.1)!

3. Berechne mit den Vektorpaaren aus Aufgabe 1 die Vektorprodukte $(-\vec{b}) \times \vec{a}$ und $\vec{b} \times (-\vec{a})$ und vergleiche die Ergebnisse!

4. Beweise, daß für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = (-\vec{b}) \times \vec{a} = \vec{b} \times (-\vec{a})$!
Deute die Aussage des Satzes auch geometrisch nach Satz S 10.1!

5. Untersuche, unter welchen Bedingungen gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ für $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$!

6. Bestätige die Gültigkeit von Satz S 10.5 an folgenden Beispielen!

a) $r=-2,\ s=3,\ \vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-4\\4\end{pmatrix}$ **b)** $r=\frac{5}{2},\ s=-\frac{1}{2},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$

7. Deute die Aussage von Satz 10.6 als Aussage über die Flächenmaßzahlen der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. von $r\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramme! Beweise den Satz mit Hilfe dieses Flächenvergleiches! Beachte dabei auch den Fall $r \leq 0$!

8. **a)** Widerlege die Gültigkeit eines Assoziativgesetzes für das Vektorprodukt durch ein Gegenbeispiel!
b) Warum kann die Gleichung $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ nicht allgemeingültig sein?

9. **a)** Warum gilt $(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\times\vec{e}_3=\vec{e}_1\times(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)$?
b) Suche weitere Beispiele, in denen für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ gilt: $(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)\times\vec{e}_k=\vec{e}_i\times(\vec{e}_j\times\vec{e}_k)$!

10. Beweise das Distributivgesetz des Vektorprodukts (Satz S 10.7)!

11. Berechne folgende Produkte mit Hilfe des Distributivgesetzes (S 10.7) für die Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$!
a) $\vec{e}_1\times(\vec{e}_2+\vec{e}_1)$ **b)** $\vec{e}_1\times(\vec{e}_2+\vec{e}_3)$ **c)** $2e_1\times(3\vec{e}_3-4\vec{e}_1)$ **d)** $\vec{e}_3\times(-\vec{e}_1-\vec{e}_2)$

12. **a)** Beweise daß für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$!
b) Führe den Beweis mit Hilfe der Sätze S 10.4 und S 10.7!

13. Beweise, daß für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in V_3$ gilt: $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$!

14. Leite aus dem Distributivgesetz die Allgemeingültigkeit der folgenden Gleichungen ab!
a) $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}$ **b)** $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{d}$
c) $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{d}-\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}$ **d)** $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}$!

15. Wo steckt in den folgenden Gleichungen der Fehler?
a) $\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$ **b)** $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}^2$
c) $\vec{a}\times(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$ **d)** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ **e)** $(\vec{a}-2\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times 2\vec{b}$
f) $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{c})$ **g)** $(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c})$ **h)** $\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\times(\vec{c}-\vec{c})=\vec{0}$

16. Für die Seitenvektoren eines Dreieckes gelte: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Multipliziere beide Seiten dieser Gleichung vektoriell mit $\vec{c}$ und leite auf diese Weise den Sinussatz her!

17. **a)** Zeige, daß für alle $\vec{a}, \vec{b} \in V_3$ und für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt: $(\vec{a}+r\vec{b})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}$!
b) Begründe mit Hilfe von a), daß für das Vektorprodukt das Regularitätsgesetz (die Rechtsstreichungsregel) $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$ nicht gilt!

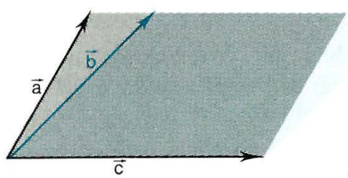


Bild 10.7

c) Begründe geometrisch, daß für das Vektorprodukt das **Regularitätsgesetz** nicht gilt (Bild 10.7)!

III. Das Spatprodukt

1. Mit drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ läßt sich das **„gemischte Produkt"** $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ bilden. Wir wollen untersuchen, welche geometrische Bedeutung dieses Produkt hat. Es gilt:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos\gamma,$$

wenn γ die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{c}$ bezeichnet (Bild 10.8).

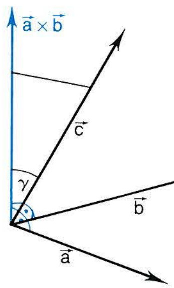


Bild 10.8

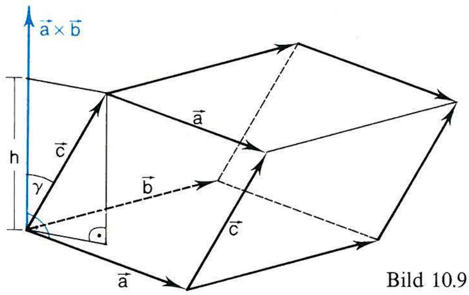


Bild 10.9

Oben haben wir bereits gezeigt (Seite 187), daß $|\vec{a}\times\vec{b}|$ die Maßzahl des Flächeninhaltes des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.
Eine Länge mit der Maßzahl $h=|\vec{c}|\cos\gamma$ erhält man, wenn man den Vektor $\vec{c}$ senkrecht in die Richtung von $\vec{a}\times\vec{b}$ hineinprojiziert. Diese Länge ist die Höhe des von den drei Vektoren aufgespannten Körpers, der von sechs paarweise zueinander parallelen ebenen Flächen in Form von Parallelogrammen begrenzt wird (Bild 10.9). Man nennt einen solchen Körper **„Parallelflach"**, „Parallelepiped" oder kurz **„Spat"**.
In Bild 10.9 bilden die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein **Rechtssystem.** Darunter verstehen wir in solchen Fällen folgendes: wählt man drei Repräsentanten von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit gemeinsamem Anfangspunkt aus, so weist der Vertreter von $\vec{c}$ in denselben Halbraum der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene wie der Vertreter von $\vec{a}\times\vec{b}$, der am gleichen Punkt angetragen ist.
Für die Inhaltsmaßzahl des Parallelflachs gilt in diesem Fall:

$$V=A\,h=|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{c}|\cos\gamma=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Man bezeichnet dieses Produkt daher als **„Spatprodukt"**.

S 10.8 **Bilden drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\in V_3$ ein Rechtssystem, so gilt für die Inhaltsmaßzahl des von den drei Vektoren aufgespannten Spats:**

$$V_{\text{Spat}}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

2. Vertauscht man im Produkt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ die Vektoren, so erhält man wegen $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$:

$$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

Bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem, so bilden $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ ein Linkssystem; das zugehörige Spatprodukt ist dann negativ. Sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig, also komplanar, so „klappt" das Spat „zusammen"; es gilt dann also

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$ Begründe dies im einzelnen (Aufgabe 2)!

Es gilt also der Satz

S 10.9 **Gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} > 0$, so bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem;**
gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, so sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar;
gilt $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} < 0$, so bilden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Linkssystem.

3. Wir haben unter 1. das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm als Grundfläche des Spats betrachtet. Nach dem Grundsatz, „was dem einen recht ist, ist dem anderen billig", können wir jedes andere Parallelogramm des Spats ebenfalls als Grundfläche auffassen; wir haben nur zu beachten, daß die Vektoren bei der Vertauschung nach wie vor ein **Rechtssystem** bilden; das ist bei **zyklischer** Vertauschung von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Fall:
wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Rechtssystem bilden, bilden auch $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ und $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ ein Rechtssystem;
dagegen bilden dann $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ und $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ jeweils ein Linkssystem.
Dies soll in Aufgabe 4 an Beispielen gezeigt werden. Mithin ergibt sich:

S 10.10 **Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ gilt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.**

Die im Spatprodukt auftretenden Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also **„zyklisch vertauschbar"**.
Wendet man bei $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ rechts das Kommutativgesetz des Skalarproduktes an, so ergibt sich überdies: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.
Es kommt also beim Spatprodukt nicht darauf an, welche beiden der drei Vektoren man durch das Vektorprodukt verknüpft; man kann die beiden Verknüpfungszeichen „$\times$" und „$\cdot$" austauschen, wenn man nur den Zyklus $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beibehält. Daher hat man für das Spatprodukt eine abkürzende Schreibweise eingeführt.

D 10.2 **Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in Ve_3$ gilt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =_{Df} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.**

Nach Satz S 10.10 gilt also: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

4. Wir haben nun noch die **Koordinatendarstellung** des Spatproduktes zu ermitteln. Es gilt:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$
$$= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3.$$

Man führt für diesen Term eine abkürzende Schreibweise ein:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Man nennt einen solchen Term eine **„dreireihige Determinante"**. Diese ist nach einer **Regel von Sarrus** dadurch zu berechnen, daß man die sechs „Diagonalprodukte" bildet und addiert bzw. subtrahiert. Um dies genauer zu erklären, schreiben wir die beiden ersten Spalten der Determinanten noch einmal neben die Determinante:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. .$$

Die positiv zu nehmenden „Hauptdiagonalenprodukte“ (von links oben nach rechts unten) sind dann: $a_1 b_2 c_3$, $a_3 b_1 c_2$ und $a_2 b_3 c_1$;
die negativ zu nehmenden „Nebendiagonalenprodukte“ (von rechts oben nach links unten) sind dann: $a_3 b_2 c_1$, $a_1 b_3 c_2$ und $a_2 b_1 c_3$.
Es gilt also:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3.$$

Dies stimmt mit dem obigen Ergebnis überein.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left|\begin{array}{rrr|rr} 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right|$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 1$$

$$= 6 + 6 - 4 + 6 + 8 + 3 = 25.$$

Nach einiger Übung gelingt es, den Wert der Determinante auch ohne die beiden Hilfsspalten zu ermitteln.

5. Man kann auch Vektorprodukte formal mit Hilfe einer Determinante berechnen, wenn man in die erste Spalte (oder Zeile) die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ hineinschreibt.

Wir wiederholen das **Beispiel** von Seite 185 für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & -2 & 3 \\ \vec{e}_2 & 1 & 2 \\ \vec{e}_3 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3 - 9\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 6\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$$

$$= 10\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Die Erfahrung zeigt, daß die auf Seite 185 erläuterte Regel nach einiger Übung leichter und schneller gehandhabt wird als die „Determinanten“-Regel.

6. Nach Satz S 10.9 kann man mit Hilfe des Spatproduktes prüfen, ob drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind oder nicht.

Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 12 - 12 - 8 - 3 + 42 = 0.$$

Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind also komplanar; es gilt z.B. $\vec{c} = 2\vec{a} + (-3)\vec{b}$.

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ das Spatprodukt: **1)** aus der Koordinatendarstellung des Vektor- und des Skalarproduktes, **2)** mit Hilfe einer dreireihigen Determinante!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}$

2. a) Zeige, daß für linear abhängige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$!
b) Untersuche, ob auch die Umkehrung dieses Satzes gilt!

3. Zeige, daß für die Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ gilt:
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)=(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)=(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2)=1$ und $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)=(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2)=(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)=-1$!

4. a) Zeige geometrisch und arithmetisch: Die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ bilden ein Rechtssystem!
b) Zeige, daß die Vektoren $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ und $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ ebenfalls Rechtssysteme bilden!
c) Zeige, daß die Vektoren $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ und $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ und $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ Linkssysteme bilden!

5. Untersuche, unter welchen Bedingungen gilt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$!

6. Bestätige an Hand der folgenden Beispiele die beiden in Satz S 10.10 aufgeführten Eigenschaften des Spatproduktes:
1) die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind im Spatprodukt zyklisch vertauschbar;
2) die Verknüpfungen „$\times$" und „$\cdot$" sind vertauschbar; das Spatprodukt ändert sich nicht.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

7. Prüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind! Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht komplanar sind, ermittle, ob sie in der gegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}7\\-1\\5\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\6\\-7\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}5\\2{,}5\\-1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix}$

8. Berechne $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ und $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$!

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\4\\-2\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

9. Drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ bestimmen ein dreiseitiges Prisma über dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Dreieck. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bestimmen aber auch ein Tetraeder. Zwischen dem Volumen V_P des Prismas und dem Volumen V_T des Tetraeders gilt die Beziehung: $V_T = \frac{1}{3} V_P$.

a) Zeige, daß gilt: $V_T = \frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \frac{1}{6}[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}]$!

b) Berechne das Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Tetraeders!

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ **2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

10. Zeige, daß für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ und für alle $r, s, t \in \mathbb{R}$ gilt: $(r\vec{a}, s\vec{b}, t\vec{c}) = (r s t)(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$!

11. Berechne die folgenden Determinanten und deute das Ergebnis geometrisch! Prüfe auch, ob die Spaltenvektoren in der gegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden!

a) $\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -11 & -6 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1000 & 50 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} a & a & -a \\ a & -a & a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$

12. Beweise die Allgemeingültigkeit folgender Gleichungen und deute sie geometrisch!

a) $(\vec{a} + r\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ und alle $r \in \mathbb{R}$)

b) $(\vec{a}, \vec{b} + s\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ und alle $s \in \mathbb{R}$)

c) $(\vec{a} + r\vec{b}, (1+r)\vec{b} + \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ und alle $r \in \mathbb{R}$)

13. Zeige: Sind drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V_3$ linear unabhängig, so hat das lineare Gleichungssystem $\vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z = \vec{d}$ (mit $\vec{d} \in V_3$) die Lösungen:

$$x = \frac{(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}, \quad y = \frac{(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \quad \text{und} \quad z = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}.$$

Anleitung: Multipliziere beide Seiten der Gleichung mit $\vec{b} \times \vec{c}$ ($\vec{c} \times \vec{a}$; $\vec{a} \times \vec{b}$)! Stelle die Lösungen in Determinantenform dar **(Cramersche Regel)**!

14. Löse nach dem Verfahren von Aufgabe 13 die folgenden linearen Gleichungssysteme!

a) $x+y+z=2 \wedge x-y-z=2 \wedge x+y-z=4$

b) $x+y+z=1 \wedge x-y-z=1 \wedge x+y-z=5$

c) $x+2y-z=8 \wedge 2x-y+z=3 \wedge x+y-2z=7$

d) $2x+y=20 \wedge 3y+4z=50 \wedge 5x+6z=83$

15. Beweise mit Hilfe des Spatproduktes folgende Sätze über dreireihige Determinanten!

a) Ist eine Spalte der Nullvektor, so hat die Determinante den Wert 0.

b) Sind zwei Spaltenvektoren kollinear, so hat die Determinante den Wert Null.

c) Vertauscht man zwei Spaltenvektoren, so ändert die Determinante das Vorzeichen.

d) Wird eine Spalte mit einer Zahl multipliziert, so wird die Determinante mit dieser Zahl multipliziert.

e) Ist ein Spaltenvektor ein Summenvektor, so ist die Determinante gleich der Summe der mit den Summandenvektoren gebildeten Einzeldeterminanten.

f) Wird zu einem Spaltenvektor eine Vielfachsumme der anderen Spaltenvektoren addiert, so ändert die Determinante ihren Wert nicht (vgl. Aufgabe 12a, b und c!)

§ 11 Anwendungen des Vektorproduktes

I. Geradengleichungen in Plückerform

1. In §9, I haben wir gesehen, daß man eine Geradengleichung in Parameterform

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$$

durch skalare Multiplikation mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ nur dann in die Normalenform

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$$

umformen kann, wenn es sich um eine Gerade im R_2 handelt.
Liegt die Gerade in R_3, so kann man den Parameter auf diese Weise nicht eliminieren, weil zu einer Raumgeraden kein eindeutig bestimmter Normalenvektor gehört.
In diesem Falle gelingt es jedoch, den Parameter t dadurch zu eliminieren, daß man die Gleichung **vektoriell** mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ multipliziert.

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a} \;|\times\vec{a}$$

$$\Rightarrow\; \vec{x}\times\vec{a}=\vec{x}_0\times\vec{a}+t(\vec{a}\times\vec{a}) \;\Rightarrow\; \vec{x}\times\vec{a}=\vec{x}_0\times\vec{a}, \qquad \text{weil } \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0} \text{ ist.}$$

Durch Anwendung des Distributivgesetzes ergibt sich daraus: $(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}$.

Diese Gleichung besagt, daß die Vektoren $\vec{x}-\vec{x}_0$ und $\vec{a}$ linear abhängig, also kollinear sind (Bild 11.1), daß es also zu jedem Vektor $\vec{x}$, der der Gleichung

$$(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}$$

genügt, (wegen $\vec{a}\neq\vec{0}$) eine Zahl $t\in\mathbb{R}$ gibt mit

$$\vec{x}-\vec{x}_0=t\vec{a}, \qquad \text{also } \vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}.$$

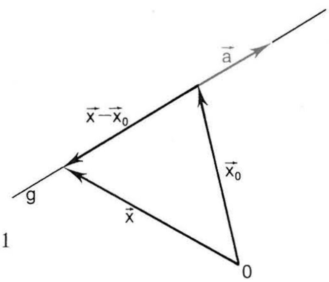


Bild 11.1

Die Gleichungen $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$ und $(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}$ sind somit äquivalent, beschreiben also beide jeweils dieselbe Gerade. Man nennt die Gleichung

$\boldsymbol{\vec{x}\times\vec{a}=\vec{x}_0\times\vec{a}}$ **bzw.** $\boldsymbol{(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}}$ eine **„Geradengleichung in Plückerform"** [1]).

Es gilt der Satz:

S 11.1 Ist eine Gerade g durch einen Ortsvektor $\vec{x}_0$ und einen Richtungsvektor $\vec{a}$ gegeben, so gilt für die Ortsvektoren $\vec{x}$ der Punkte von g und nur für diese:

$$\boldsymbol{(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}.}$$

[1]) Julius Plücker (1801 – 1868), deutscher Mathematiker und Physiker; er lehrte in Halle und Bonn.

2. Die Plückerform ist als Gleichung zwischen Vektoren des R_3 die Zusammenfassung von drei Zahlengleichungen. Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen wollen wir uns an einem **Beispiel** klarmachen.

Gegeben: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (vergleiche das Beispiel auf Seite 73!)

Es gilt: $\vec{x} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z \\ z + 2x \\ x - y \end{pmatrix}$; $\vec{x}_0 \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die drei Gleichungen der Plückerform lauten also bei diesem Beispiel:

$$\begin{aligned} -2y - z &= -1, \\ 2x \quad + z &= \ \ 7, \\ \text{und} \quad x - y \quad &= \ \ 3. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir haben diese drei Gleichungen schon in §5, I (Seite 73) beim gleichen Beispiel durch Elimination des Parameters aus je zwei Gleichungen hergeleitet, aus denen die Parametergleichung $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{a}$ besteht. Dort konnten wir die geometrische Bedeutung dieser Gleichung allerdings noch nicht vollständig klären.

Jede dieser Gleichungen läßt sich in doppelter Weise deuten: als Gleichung einer **Geraden** in einer der drei Koordinatenebenen oder als Gleichung einer **Ebene.** So ist z.B. die dritte Gleichung $x - y = 3$ die Gleichung einer Geraden in der x-y-Ebene.

Schreibt man die Gleichung in der Form: $x - y - 0 \cdot z = 3$
so ist die Gleichung einer Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor liegt in der x-y-Ebene; die Ebene steht also auf der x-y-Ebene senkrecht und schneidet diese Koordinatenebene in der Geraden zur Gleichung $x - y = 3$. Entsprechendes gilt auch von den beiden anderen Gleichungen der Plückerform. Die Raumgerade g wird also in der Plückerform

$$\vec{x} \times a = \vec{x}_0 \times \vec{a}$$

dargestellt durch drei Ebenen, die jeweils auf einer Koordinatenebene senkrecht stehen und die sich in g schneiden (Bild 11.2). Man nennt die drei Ebenen **„projizierende Ebenen"** und die durch die Projektion erzeugten Bildgeraden

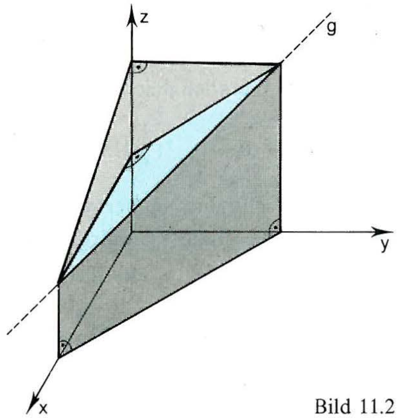


Bild 11.2

in der x-y-Ebene: **„Grundriß"**, im Beispiel: $x - y = 3$;
in der y-z-Ebene: **„Aufriß"**, im Beispiel: $-2y - z = -1$,
in der x-z-Ebene: **„Seitenriß"**, im Beispiel: $2x + z = 7$.

Die Darstellung einer Raumgeraden in der Plückerform entspricht also der Grund-, Auf- und Seitenrißdarstellung einer Geraden in der darstellenden Geometrie.

Während sich in der Regel drei Ebenen nur in einem Punkt schneiden, schneiden sich die drei projizierenden Ebenen in der betreffenden Geraden. Dies bedeutet, daß die drei Gleichungen voneinander abhängig sein müssen. In der Tat kann man durch Linearkombination von je zwei dieser Gleichungen die dritte herleiten, z.B.:

$$\begin{array}{rcrl} x - y & = & 3 & \mid \cdot 2 \\ -2y - z & = & -1 & \mid \cdot(-1) \\ \hline 2x \quad + z & = & 7 & \end{array}$$

Man erhält dadurch also die dritte Gleichung. Führe den Beweis allgemein (Aufgabe 4)! Dieser Sachverhalt entspricht der aus der darstellenden Geometrie bekannten Tatsache, daß ein Gegenstand in der Regel schon durch Grund- und Aufriß allein festgelegt ist und daß man aus ihnen den Seitenriß konstruieren kann.

Übungen und Aufgaben

1. Eine Gerade g im Raum sei gegeben durch einen Ortsvektor $\vec{x}_0$ und den Richtungsvektor $\vec{a}$. Stelle die **Plückerform** der Geradengleichung auf, ermittle die Gleichungen der projizierenden Ebenen und der durch ihre Projektion erzeugten Bildgeraden (Grundriß, Aufriß und Seitenriß)! Fertige ferner eine perspektivische Zeichnung wie in Bild 11.2 an!

a) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ **e)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Eine Gerade im Raum sei durch zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben. Ermittle die Plückerform der Geradengleichung und die Gleichungen der drei projizierenden Ebenen!

a) $P_1(4|-1|3)$, $P_2(-1|4|0)$ **b)** $P_1(0|5|3)$, $P_2(0|-4|-5)$

c) $P_1(4|-3|-4)$, $P_2(1|5|2)$ **d)** $P_1(0|5|6)$, $P_2(4|3|0)$

3. In der x-y-Ebene, in der y-z-Ebene und in der x-z-Ebene ist je eine Gerade angegeben. Untersuche, ob sie Grundriß, Aufriß und Seitenriß **einer** Geraden im Raum darstellen!

a) $\begin{array}{l} x+y=4 \\ y+z=0 \\ x-z=4 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 2x-y=2 \\ y+3z=1 \\ 2x+3z=3 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ y-z=1 \\ 4x+2z=-2 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} x-4y=7 \\ 2y-3z=4 \\ x-6z=15 \end{array}$

4. Zeige allgemein, daß sich aus zwei Koordinatengleichungen der Plückerform die dritte Koordinatengleichung herleiten läßt!

5. Von einer Geraden g im Raum sind zwei der drei Bildgeraden in den Koordinatenebenen gegeben. Ermittle jeweils die dritte (fehlende) Gleichung und somit die Plückerform der zugehörigen Raumgeraden g!

a) $\begin{array}{r} x+2y=4 \\ 2y-z=2 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} y-4z=7 \\ 3x+y=3 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{l} x=3y-1 \\ z=-y+4 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{l} y=-x \\ z=x \end{array}$

II. Zur Normalengleichung einer Ebene

1. In §9, I haben wir aus der Parametergleichung für eine Ebene

$$\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$$

durch skalare Multiplikation mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ eine Normalengleichung $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$ der Ebene hergeleitet. Allerdings erforderte die Ermittlung eines Normalenvektors $\vec{n}$ aus zwei Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine relativ aufwendige Rechnung.
Mit Hilfe des Vektorproduktes können wir nun einen Normalenvektor der betreffenden Ebene in einfacher Weise ermitteln: $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$.
Multipliziert man eine Parametergleichung auf beiden Seiten skalar mit diesem Vektor $\vec{n}$, so erhält man wegen $\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ und $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ die Normalengleichung $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$.

Beispiel: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

Da es auf die Länge des Normalenvektors nicht ankommt, wählen wir: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$.

Ferner ist: $\vec{x}_0\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=2-8-2=-8$.

Mithin lautet die Ebenengleichung: $\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}=-8$ bzw. $2x+4y+z=-8$.

2. Man kann die Normalengleichung einer Ebene in (wenigstens) drei verschiedenen Formen schreiben; jede dieser Formen gestattet eine eigene geometrische Deutung.

1) $(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot\vec{n}=0$ bedeutet geometrisch, daß der Vektor $\vec{n}$ auf jedem in der Ebene gelegenen Vektor $\vec{x}-\vec{x}_0$ senkrecht steht (Bild 11.3).

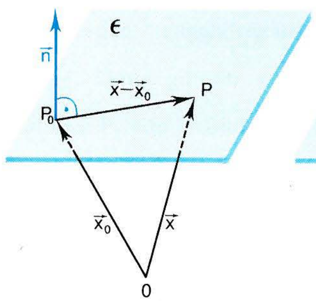


Bild 11.3

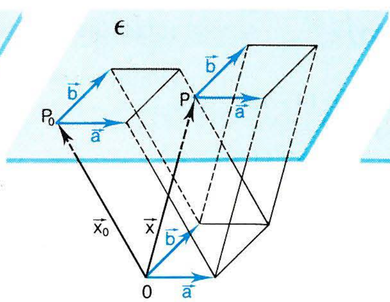


Bild 11.4

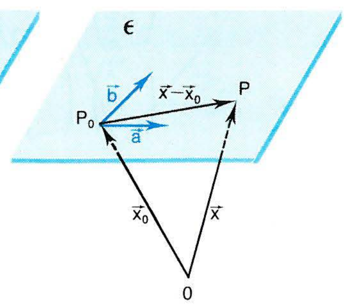


Bild 11.5

2) $\vec{x}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{x}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, also $(\vec{x},\vec{a},\vec{b})=(\vec{x}_0,\vec{a},\vec{b})$ bedeutet geometrisch, daß die von $\vec{x},\vec{a},\vec{b}$ bzw. $\vec{x}_0,\vec{a},\vec{b}$ aufgespannten Spate inhaltsgleich sind. Bild 11.4 zeigt, daß die beiden Spate durch Scherung aufeinander abgebildet werden können.

3) $(\vec{x}-\vec{x}_0)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$, also $(\vec{x}-\vec{x}_0,\vec{a},\vec{b})=0$ bedeutet geometrisch, daß die Vektoren $\vec{x}-\vec{x}_0,\vec{a},\vec{b}$ linear abhängig, also komplanar sind (Bild 11.5).

Die Formen unter 2) und 3) zeigen, daß man die Normalenform einer Ebenengleichung auch mit Hilfe von **Determinanten** schreiben kann. Wir erläutern dies am Beispiel von Seite 201.

Zu 2): Die Gleichung $(\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{x}_0, \vec{a}, \vec{b})$ lautet in diesem Falle:

$$\begin{vmatrix} x & -3 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Durch Ausrechnen der beiden Determinanten erhält man:

$2x+3z+2y-z+2x+6y=2-6-4+2+2-12 \Leftrightarrow 2x+4y+z=-8$ (vgl. Seite 201!)

Das gleiche Beispiel soll in Aufgabe 3 nach der Form 3) behandelt werden.

3. Ist eine Ebene ε durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 mit dem Ortsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ gegeben, so sind zwei unabhängige Spannvektoren der Ebene $\vec{a}$ und $\vec{b}$ z.B. gegeben durch $\vec{a} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ und $\vec{b} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1$. Eine Gleichung der Ebene lautet in diesem Falle also:

$$(\vec{x}, \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \vec{x}_3 - \vec{x}_1) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \vec{x}_3 - \vec{x}_1) \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x} - \vec{x}_1, \vec{x}_2 - \vec{x}_1, \vec{x}_3 - \vec{x}_1) = 0.$$

Genauso schnell gelingt es, diese Gleichung mit Hilfe des Vektorproduktes zu ermitteln.

Beispiel: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$;

dann ist $\vec{a} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \times (\vec{x}_3 - \vec{x}_1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix};$$

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} = -7+36-30 = -1.$$

Probe: $\vec{x}_2 \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix} = 14 - 15 = -1.$

Die Gleichung der Ebene lautet also: $-7x-12y-15z=-1$ bzw. $7x+12y+15z=1$.

Übungen und Aufgaben

1. Eine Ebene ε sei durch einen Punkt P_0 und zwei nichtkollineare Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben. Ermittle eine Normalenform der Ebenengleichung! Deute sie geometrisch auf verschiedene Weisen!

a) $P_0(1|-1|2)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $P_0(0|-2|3)$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind drei Punkte P_1, P_2 und P_3 im Raum. Ermittle von der durch sie bestimmten Ebene ε eine Normalengleichung!

a) $P_1(1|0|0)$, $P_2(0|1|0)$, $P_3(0|0|1)$ **b)** $P_1(2|-1|4)$, $P_2(4|1|2)$, $P_3(1|5|3)$

3. Behandle das Beispiel aus 1. (Seite 201) nach der Form 3) der Normalengleichung!

4. Verwende zur Ermittlung der Normalengleichung der Ebene ε Determinanten!

a) $P_0(-2|0|3)$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$

5. Löse mit Hilfe von Determinanten **a)** Aufgabe 1, **b)** Aufgabe 2!

III. Lageuntersuchungen mit Hilfe des Vektorproduktes

1. In §9, III haben wir gesehen, daß man den **Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden g** im R_2 mit Hilfe des „Projektionsverfahrens" nach der Formel $d=|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\vec{e}_n|$ ermitteln kann. Hierbei wird das **Skalarprodukt** auf einen Normaleneinheitsvektor angewendet.
In ähnlicher Weise gelingt es, den Abstand eines Punktes P_1 von einer Geraden g im R_3 zu ermitteln, wenn man als Richtungsvektor der Geraden einen Einheitsvektor wählt und das **Vektorprodukt** bildet.

2. Eine Gerade g sei gegeben durch die Parameterform $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$. Ein Punkt P_1 sei gegeben durch den Ortsvektor $\vec{x}_1$. Wir ersetzen zunächst die Richtungsvektoren $\vec{a}$ durch den zugehörigen Einheitsvektor $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Dann gilt für den Abstand d des Punktes P_1 von g (Bild 11.6):

$$d=|\vec{x}_1-\vec{x}_0|\sin\alpha,$$

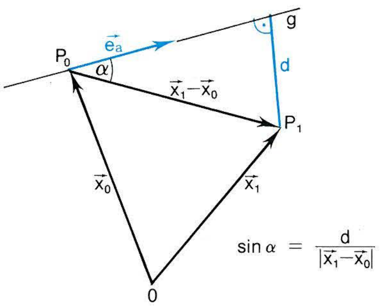


Bild 11.6

wobei α die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{x}_1-\vec{x}_0$ und $\vec{a}$ bezeichnet. Fügt man noch den Faktor $|\vec{e}_a|=1$ hinzu, so erhält man nach der Definition des Vektorproduktes:

$$d=|\vec{x}_1-\vec{x}_0|\,|\vec{e}_a|\sin\alpha=|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\times\vec{e}_a|.$$

3. Die Plückergleichung einer Geraden lautet:

$$\vec{x}\times\vec{a}=\vec{x}_0\times\vec{a} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{a}=\vec{0}.$$

Ersetzt man $\vec{a}$ durch den zugehörigen Einheitsvektor $\vec{e}_a=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, so erhält man:

$$(\vec{x}-\vec{x}_0)\times\vec{e}_a=\vec{0}.$$

Setzt man in $\vec{x}$ die Koordinaten eines Punktes der Geraden ein, so ist die Gleichung erfüllt. Setzt man dagegen die Koordinaten eines Punktes P_1 ein, der nicht auf der Geraden liegt, so erhält man statt des Nullvektors einen Vektor, dessen Betrag den Abstand des Punktes von der Geraden angibt:

$$\mathbf{d = |(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a|.}$$

Beispiel: Gegeben: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vergleiche Seite 175!)

Dann gilt: $\vec{x}_1 - \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = \sqrt{11}$; $\vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \times \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich:

$$d = \frac{1}{\sqrt{11}} \cdot \sqrt{16+1+49} = \sqrt{\frac{66}{11}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45.$$

4. Ein **Sonderfall** liegt vor, wenn der Abstand einer Geraden g vom **Nullpunkt** bestimmt werden soll. Wir setzen $\vec{x}_1 = \vec{0}$. Dann gilt:

$$d = |-\vec{x}_0 \times \vec{e}_a| = |\vec{x}_0 \times \vec{e}_a|.$$

Beispiel: Gegeben: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$; $\vec{x}_0 \times \vec{e}_a = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Also ergibt sich:

$$d = \frac{1}{\sqrt{26}} \sqrt{9+121+25} = \sqrt{\frac{155}{26}} \approx 2{,}44.$$

5. In §5, III (Seite 83ff.) und in §7, IV (Seite 123f.) haben wir bereits erörtert, welche **Lagebeziehungen zwei Geraden** g_1 und g_2 haben können, die durch Gleichungen der Form

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + r\vec{a} \quad \text{und} \quad x = \vec{x}_2 + s\vec{b}$$

gegeben sind. Es kommt darauf an, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und gegebenenfalls auch noch der Vektor $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ kollinear sind oder nicht.
In den meisten Fällen kann man unmittelbar erkennen, ob die Koordinaten zweier Vektoren zueinander proportional, die Vektoren also kollinear sind oder nicht. Man kann diese Untersuchung grundsätzlich aber auch mit Hilfe des Vektorproduktes durchführen; denn $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ bedeutet, daß $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, daß sie nicht kollinear sind.

6. Gilt also für die Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zweier Geraden $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$, so sind die Geraden entweder windschief oder sie schneiden sich in genau einem Punkt P. Die beiden Geraden liegen dann stets in den beiden parallelen Ebenen ε_1 und ε_2, die durch die folgenden Gleichungen gegeben sind (Bild 11.7):

$$\varepsilon_1:\quad \vec{x}=\vec{x}_1+r\vec{a}+s\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0};$$

$$\varepsilon_2:\quad \vec{x}=\vec{x}_2+r\vec{a}+s\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x}-\vec{x}_2)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}.$$

Diese beiden Ebenen können im Sonderfall auch identisch sein.

Sind die Ebenen ε_1 und ε_2 voneinander verschieden, so ist ihr Abstand zugleich der Abstand der beiden windschiefen Geraden. Dieser Abstand kann nach dem Projektionsverfahren (vergleiche §9, III) leicht ermittelt werden. Man braucht nur den Verbindungsvektor $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ der beiden Punkte P_1 und P_2 in die gemeinsame Normalenrichtung der beiden Ebenen zu projizieren. Es gilt also:

$$\mathbf{d}=\left|(\vec{\mathbf{x}}_2-\vec{\mathbf{x}}_1)\cdot\frac{\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|}\right|.$$

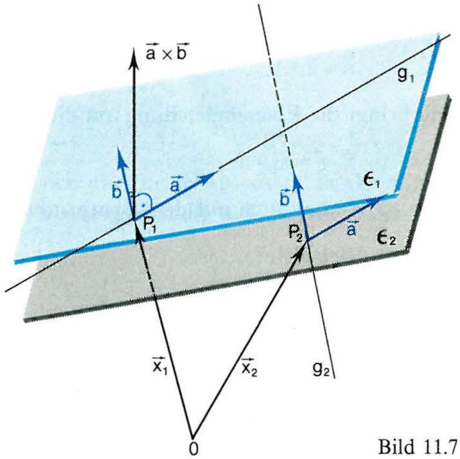


Bild 11.7

Beispiel:

Gegeben: g_1 durch $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$;

g_2 durch $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}14\\4\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}$ (vergleiche Seite 176!)

Dann gilt: $\vec{x}_2-\vec{x}_1=\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}$;

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-6\\-7\end{pmatrix};$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{81+36+49}=\sqrt{166}.$$

Somit ergibt sich:

$$d=\left|(\vec{x}_2-\vec{x}_1)\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{166}}\begin{pmatrix}13\\7\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{117+42+7}{\sqrt{166}}\right|=\frac{166}{\sqrt{166}}=\sqrt{166}\approx 12{,}9.$$

7. Wenn die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 zusammenfallen, dann schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt P; dann ergibt sich aus der Abstandsformel: $d=0$.

8. In §5, III, in §7, IV und in §9, III haben wir ebenfalls schon untersucht, in welcher **gegenseitigen Lage eine Ebene und eine Gerade** sich befinden können. Falls die Ebene in Parameterform

$$\vec{x}=\vec{x}_0+r\vec{a}+s\vec{b}$$

gegeben ist, kann man die Untersuchung mit Hilfe des Vektorproduktes vereinfachen: man berechnet den Normalenvektor

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$$

und bringt die Ebenengleichung auf die Normalenform

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}.$$

Man kann aber auch mit dem Spatprodukt arbeiten.

Beispiele:

1) Gegeben: ε durch: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$;

g durch: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}$ (vergleiche Beispiel 2) auf Seite 125!)

Wir untersuchen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit Hilfe des Spatproduktes auf lineare Abhängigkeit. Wir könnten dies mit Hilfe einer dreireihigen Determinante (vergleiche Seite 194f.!) durchführen. Da wir jedoch das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ unten noch benötigen, ist es in diesem Falle zweckmäßiger, die Definitionsformel des Spatproduktes, also $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, anzuwenden. Es gilt:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\end{pmatrix};\quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}=5+16-21=0.$$

Also sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar. Die Gerade verläuft also parallel zur Ebene oder liegt sogar in der Ebene. Wir bestimmen den Abstand der Geraden von der Ebene mit Hilfe des Projektionsverfahrens nach der Formel

$$d=\left|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\cdot\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right|.$$

Es ist $\vec{x}_1-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{25+16+9}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Also gilt: $d=\left|\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-4\\-3\end{pmatrix}\right|=\left|\frac{5-4}{5\sqrt{2}}\right|=\frac{1}{5\sqrt{2}}\approx 0{,}141.$

Ebene und Gerade verlaufen also parallel zueinander.

2) Gegeben ε durch: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$; g durch: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-4\\7\end{pmatrix}$

(vergleiche Beispiel 3) auf Seite 126!)

Es ergibt sich $d=0$. Die Gerade liegt also in der Ebene ε.

3) Gegeben ε durch: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$; g durch: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$

(vergleiche Beispiel 1) auf Seite 125!)

Es ist $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=-6.$

Gerade und Ebene sind also nicht parallel, müssen sich also in genau einem Punkt schneiden. Zur Ermittlung dieses Punktes formen wir die Ebenengleichung auf die Normalenform $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot\vec{n}$ um.

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_0\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\-2\\-1\end{pmatrix}=15-2-1=12.$$

Die Gleichung der Ebene lautet also $-5x-2y-z=12$ bzw. $5x+2y+z=-12$.
Wir setzen die Koordinaten der Geradengleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

in die Normalengleichung der Ebene ein:

$$5(2+t)+2(-3-t)+(2+3t)=-12 \Leftrightarrow t=-3.$$

Der Schnittpunkt zwischen Geraden und Ebene ist also festgelegt durch

$$\vec{x}_s=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}.$$

Probe an der Ebenengleichung: $5\cdot(-1)+2\cdot 0+(-7)=-12$.

9. Wenn zwei Ebenen ε_1 und ε_2 in Parameterform gegeben sind, ist es in den meisten Fällen zweckmäßig, mit Hilfe des Vektorproduktes zugehörige Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ zu bestimmen und die weitere Untersuchung – wie in §9 besprochen – an Hand der Normalengleichungen

$$\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{x}_1\cdot\vec{n}_1 \quad \text{und} \quad \vec{x}\cdot\vec{n}_2=\vec{x}_2\cdot\vec{n}_2$$

durchzuführen.
Die Ebenen sind parallel (evtl. sogar identisch) genau dann, wenn $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0}$ ist; sie schneiden sich in einer Geraden genau dann, wenn $\vec{n}_1\times\vec{n}_2\neq\vec{0}$ ist.

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle jeweils den Abstand des Nullpunktes und des Punktes P_1 von der Geraden g!

a) $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-3\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$; g: $\vec{x}_0=\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix}$

2. Drei Geraden bestimmen ein Dreieck ABC. Berechne die Höhen des Dreiecks!

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}.$$

3. Berechne den Abstand des Punktes P_3 von der Geraden durch P_1 und P_2!

a) $P_1(-1|-1|-1)$, $P_2(0|2|-1)$, $P_3(2|2|-1)$

b) $P_1(0|2|-3)$, $P_2(-1|6|-1)$, $P_3(3|-10|-9)$

4. Durch den Schnittpunkt der beiden Geraden g_1 und g_2 werde eine Gerade g gelegt, die senkrecht zu g_1 und zu g_2 verläuft. Berechne den Abstand des Nullpunktes und des Punktes P_1 von dieser Geraden g!

a) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $P_1(5|-2|-1)$

b) g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; $P_1(-2|0|1)$

5. Eine Gerade g im Raum sei durch ihre Bildgeraden in zwei von den drei Koordinatenebenen (Grundriß, Aufriß und Seitenriß) gegeben. Ermittle die Plückergleichung der Geraden g und berechne ihren Abstand vom Nullpunkt und vom Punkt P_1!

a) $x+y=1$, $z-x=2$; $P_1(2|-1|1)$ **b)** $x+y=0$, $2z-y=1$; $P_1(4|2|3)$

6. Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g_1 und g_2! Berechne gegebenenfalls ihren Abstand oder ihren Schnittpunkt und die Größe ihres Schnittwinkels!

a)
g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\3\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$;
g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}$

b)
g_1: $\vec{x}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$;
g_2: $\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-4{,}5\\1{,}5\\-3\end{pmatrix}$

c)
g_1: $P_1(4|-2|0)$, $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$;
g_2: $P_2(6|-2|0)$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix}$

d)
$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix};$

$g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$

e)
$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix};$

$g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

f)
$g_1\colon P_1(4|-1|-3),\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix};$

$g_2\colon P_2(1|-2|-3),\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}6\\1{,}5\\2\end{pmatrix}$

g)
$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix};$

$g_2\colon \vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$

h)
$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix};$

$g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$

i)
$g_1\colon P_1(2|3|1),\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix};$

$g_2\colon P_2(1|-2|3),\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

7. Die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 bestimmen ein Tetraeder. Berechne den Abstand des Punktes P_1 von der Kante P_3P_4 und die Abstände des Punktes P_2 von den Kanten P_1P_4 und P_1P_3!
a) $P_1(0|-1|1)$, $P_2(0|2|2)$, $P_3(-1|3|1)$, $P_4(1|2|4)$
b) $P_1(4|-1|1)$, $P_2(3|2|1)$, $P_3(-2|0|2)$, $P_4(1|2|8)$

8. Zeige durch Abstandsberechnung, daß sich die beiden Geraden g_1 und g_2 schneiden! Ermittle den Schnittpunkt und die Größe des Schnittwinkels!

a) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix};$ $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

b) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};$ $g_2\colon \vec{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

c) $g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix};$ $g_2\colon P(1|3|2),\ Q(6|-2|0)$

9. Ein Parallelflach habe die Grundfläche $P_1P_2P_3P_4$ und die Deckfläche $P_5P_6P_7P_8$. Durch P_2, P_4 und durch P_5, P_7 sind zwei Flächendiagonalen, durch P_1, P_7 und durch P_2, P_8 sind zwei Raumdiagonalen festgelegt.
a) Ermittle die Punktkoordinaten der übrigen Punkte, wenn gegeben sind: $P_1(0|0|0)$, $P_2(3|0|0)$, $P_4(1|4|0)$ und $P_6(4|-1|3)$!
b) Zeige durch Abstandsberechnung, daß sich die Raumdiagonalen durch P_1, P_7 und durch P_2, P_8 schneiden und ermittle den Schnittpunkt!
c) Berechne die Abstände zwischen den beiden genannten Flächendiagonalen und die Abstände bei den Paaren aus einer Flächendiagonalen und einer Raumdiagonalen!
d) Ermittle die Höhe des Spats über der Grundfläche! Ist dieser Wert in früheren Aufgabenteilen bereits ausgerechnet worden?

10. Löse die in 9. gestellte Aufgabe für ein Parallelflach, welches durch die folgenden vier Punkte bestimmt ist!
a) $P_1(2|0|0)$, $P_2(4|4|2)$, $P_3(0|6|2)$, $P_5(0|0|6)$
b) $P_1(1|1|1)$, $P_2(0|0|4)$, $P_6(-3|3|5)$, $P_8(3|7|0)$

11. Untersuche die gegenseitige Lage der Ebene ε und der Geraden g! Berechne den Abstand der Geraden von der Ebene oder ihren Schnittpunkt und die Größe des Schnittwinkels!

a) $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

b) $g\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}12\\3\\4\end{pmatrix}$

c) $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\3\\-8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$

d) $g\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}_0=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix},\ \vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$

e) $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

f) $g\colon \vec{x}_1=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\quad \varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\4\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$

12. Ein Parallelflach mit der Grundfläche $P_1P_2P_3P_4$ und der Deckfläche $P_5P_6P_7P_8$ ist durch die vier Punkte $P_1(0|1|0)$, $P_3(4|5|2)$, $P_5(-1|0|4)$, $P_6(4|-1|5)$ festgelegt.
a) Berechne die Höhe des Parallelflachs, also den Abstand zwischen der Grund- und der Deckfläche!
b) Berechne das Volumen des Parallelflachs mit Hilfe des Spatproduktes und der in a) ermittelten Höhe!
c) Zeige, daß die Kante P_2P_6 zu der durch die beiden Raumdiagonalen P_1P_7 und P_3P_5 bestimmten Ebene parallel verläuft! Berechne deren Abstand und benutze diesen zu einer weiteren Berechnung des Parallelflachvolumens!

13. Löse Aufgabe 12 für ein Parallelflach, das durch die vier Punkte $P_1(0|0|0)$, $P_2(4|0|0)$, $P_3(5|3|1)$ und $P_6(3|2|6)$ festgelegt ist!

14. Ein Tetraeder ist durch die Punkte $A(2|0|0)$, $B(4|6|-1)$, $C(0|4|2)$ und $D(3|2|5)$ gegeben.
a) Verbinde die Mitten der beiden Kanten AB und AD und zeige, daß die Verbindungsgerade zur Seitenfläche BCD parallel verläuft! Berechne deren Abstand und vergleiche ihn mit dem Abstand des Punktes A von der Seitenfläche BCD!
b) Berechne das Tetraedervolumen mit Hilfe des Spatproduktes und mit Hilfe der Höhe des Tetraeders über der Seitenfläche BCD!

15. Löse Aufgabe 14 für ein Tetraeder, das durch die vier Punkte $A(1|0|4)$, $B(-1|-3|-1)$, $C(3|-6|0)$ und $D(3|3|1)$ festgelegt ist!

16. Untersuche, welche gegenseitige Lage die Ebenen ε_1 und ε_2 zueinander haben! Bestimme ihren Abstand oder ihre Schnittgerade und die Größe des Schnittwinkels!

a) $\varepsilon_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\5\\-4\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

b) $\varepsilon_1: \vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

c) $\varepsilon_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-5\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$

d) $\varepsilon_1: \vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}, \vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix}$

e) $\varepsilon_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$

f) $\varepsilon_1: x=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$

g) $\varepsilon_1: \vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{b}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: P_1(1|-1|2), P_2(2|4|-1), P_3(3|3|0)$

h) $\varepsilon_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$; $\quad\varepsilon_2: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\4\\-5\end{pmatrix}$

17. **a)** Zeige für das von den vier Punkten $A(-2|0|0)$, $B(4|-2|2)$, $C(6|4|4)$ und $D(2|0|8)$ gebildete Tetraeder, daß jeweils die durch drei Kantenmittelpunkte verlaufende Ebene zu einer Seitenfläche parallel ist!

b) Beweise den in a) nachgewiesenen Sachverhalt als allgemeingültige Aussage für jedes von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Tetraeder!

18. Untersuche, ob die Punkte P_4, P_5 und P_6 in der Ebene liegen, die durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 festgelegt ist! Welche Form hat ggf. das von P_1, P_2, P_3 und P_4 gebildete ebene Viereck? Berechne ggf. die Volumenmaßzahl derjenigen Pyramide, die dieses Viereck als Grundfläche und den Punkt P_5 (P_6) als Spitze hat!

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
a)	$(8\|-2\|0)$	$(12\|0\|2)$	$(8\|6\|4)$	$(4\|4\|2)$	$(6\|-2\|10)$	$(10\|6\|-6)$
b)	$(5\|7\|4)$	$(3\|3\|2)$	$(3\|5\|-2)$	$(1\|7\|-4)$	$(11\|5\|-4)$	$(-5\|9\|4)$
c)	$(2\|0\|1)$	$(7\|3\|3)$	$(9\|1\|1)$	$(4\|-2\|-1)$	$(6\|10\|-5)$	$(16\|2\|1)$
d)	$(5\|-3\|0)$	$(0\|-2\|-1)$	$(5\|1\|1)$	$(10\|0\|2)$	$(5\|-7\|-1)$	$(13\|2\|0)$

19. Bestimme mit den Punkten von Aufgabe 18 jeweils eine Ebene ε_1 durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 und eine Ebene ε_2 durch die Punkte P_4, P_5 und P_6! Untersuche jeweils die Lagebeziehung der beiden Ebenen ε_1 und ε_2 zueinander!

20. Gegeben seien die Geraden

$$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\4\\-4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix};\qquad g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix};$$

$$g_3\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix};\qquad g_4\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-8\\-8\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}.$$

a) Untersuche, welche Geradenpaare sich schneiden und welche Paare windschief sind! Berechne den Schnittpunkt oder den Abstand!

b) Die vier Geraden bestimmen paarweise zwei Ebenen, in denen sie liegen. Ermittle den Abstand dieser beiden Ebenen!

c) Untersuche, ob die Geraden g_5 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\\1\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ und g_6 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ebenfalls in einer der Ebenen liegen, und ermittle ihren Abstand!

IV. Übergreifende Aufgaben

1. Ein Dreieck ABC sei durch die Punkte $A(a|0|0)$, $B(0|a|0)$ und $C(0|0|a)$ mit $a>0$ bestimmt.

a) Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes S des Dreiecks ABC!

b) Ermittle Gleichungen der Ebene ε durch A, B und C in Parameterform und in Normalenform!

c) Ein Punkt P sei durch die Bedingungen festgelegt: $\overrightarrow{SP}\perp\varepsilon$; $|SP|=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$; O und P liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene ε. Ermittle die Koordinaten von P!

d) Ermittle eine Gleichung der Geraden g_1 durch O und P in Parameterform! Wie groß ist der Winkel, den g_1 mit der positiven x-Achse einschließt?

e) Zeige, daß die Pyramide ABCP ein regelmäßiges Tetraeder ist! Berechne das Volumen des Tetraeders!

2. Ein Tetraeder sei festgelegt durch die Punkte $P_1(0|-2|0)$, $P_2(3|1|1)$, $P_3(1|2|1)$ und $P_4(1|1|3)$.

a) Zeige, daß das Dreieck $P_2P_3P_4$ gleichschenklig ist!

b) Berechne die Größen der Innenwinkel dieses Dreiecks!

c) Ermittle eine Normalengleichung der Ebene ε, die durch die Punkte P_2, P_3 und P_4 geht!

d) Ermittle eine Gleichung für die Gerade g, die auf der Ebene ε senkrecht steht und durch den Punkt P_1 geht!

e) Berechne den Schnittpunkt F zwischen der Ebene ε und der Geraden g und ermittle die Länge $|P_1F|$!

f) Kontrolliere das Ergebnis über $|P_1F|$ mit Hilfe der Normalengleichung von ε!

3. Drei Geraden seien gegeben durch:

$$g_1\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-4\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};\quad g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix};\quad g_3\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-1\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

a) Welche Lage haben die Geraden g_1 und g_2 und die Geraden g_1 und g_3 zueinander? Ermittle ggf. die Schnittpunkte!

b) Berechne die Spurpunkte von g_1 in den Koordinatenebenen!

c) Zeichne die Projektion der Geraden g_1 auf die x-y-Ebene!

4. Gegeben sind die Punkte $P_1(1|0|1)$, $P_2(2|-1|3)$ und $P_3(2|0|1)$ und die Ebene ε_1 durch

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Ermittle Gleichungen für die Ebene ε_2 durch P_1, P_2 und P_3 in Parameterform und in Normalenform!

b) Bestimme eine Parametergleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen ε_1 und ε_2!

c) Ermittle die Gleichungen von Grundriß, Aufriß und Seitenriß von g!

d) Ermittle eine Normalengleichung der Ebene ε_3, die auf der Ebene ε_2 in den Punkten P_1 und P_3 senkrecht steht!

e) Bestimme die gegenseitige Lage von ε_1 und ε_3!

5. Die Ebenen ε_1 und ε_2 seien durch $x-3y+2z=-2$ und $2x-y+z=3$ bestimmt, ferner sei $P_1(-3|3|-2)$ gegeben. Ermittle:

a) eine Parametergleichung der Schnittgeraden von ε_1 und ε_2,

b) die Größe α des Schnittwinkels zwischen ε_1 und ε_2,

c) die Plückergleichung der Schnittgeraden,

d) die Abstände des Punktes P_1 von ε_1, von ε_2 und von der Schnittgeraden!

6. Gegeben sind die Punkte $P_1(-1|2|-3)$, $P_2(2|1|-3)$ und $P_3(1|-1|-3)$, ferner die Ebene ε_1 zu $2x+y-3z=4$. Ermittle:

a) eine Gleichung der Geraden g durch P_1 und P_2;

b) den Abstand des Punktes P_3 von g;

c) eine Gleichung der Ebene ε_2, die g enthält und auf der Ebene ε_1 senkrecht steht! Welche besondere Lage hat die Ebene ε_2?

7. Gegeben seien die Gerade g_1 durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und die Punkte $P_1(-1|-1|2)$ und $P_2(-1|-3|1)$.

a) Ermittle eine Gleichung für die Gerade g_2 durch P_1 und P_2!

b) Berechne den Abstand der Geraden g_1 und g_2 und die zugehörigen Lotfußpunkte!

c) Bestimme eine Gleichung für die Gerade g_3, die auf den Geraden g_1 und g_2 senkrecht steht!

d) Ermittle eine Parametergleichung für die Ebene ε, die g_1 und P_1 enthält!

e) Ermittle eine Normalengleichung für die Ebene ε!

f) Berechne den Abstand des Punktes P_2 von der Ebene ε!

g) Berechne die Größe des Winkels, den ε und g_2 einschließen!

8. Gegeben sind die Punkte $P_1(1|0|-1)$, $P_2(2|-1|-3)$ und $P_3(1|1|2)$, die Ebene ε_1 durch $2x-y+z=4$ und die Gerade g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

a) Ermittle eine Normalengleichung für die Ebene ε_2 durch P_1, P_2 und P_3!

b) Untersuche die gegenseitige Lage von ε_1 und ε_2 zueinander und zur Geraden g! Bestimme jeweils den Abstand oder das Schnittgebilde und die Größe des Schnittwinkels! Ermittle ferner die Projektionen des Schnittgebildes in den drei Koordinatenebenen!

9. Gegeben sind die fünf Punkte $P_1(6|-1|-8)$, $P_2(4|-2|-5)$, $Q_1(1|1|-2)$, $Q_2(-2|1|1)$, $Q_3(2|-1|-5)$ und die Ebene ε_1 zu $x+3y+3z=4$.

a) Ermittle eine Parametergleichung der Geraden g_1 durch die Punkte P_1 und P_2!

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene ε_2 durch die Punkte Q_1, Q_2 und Q_3 in Parameterform und in Normalenform!

c) Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen ε_1 und ε_2, bestimme ihren Abstand oder ihre Schnittgerade g_2 und die Größe ihres Schnittwinkels!

d) Ermittle Grundriß, Aufriß und Seitenriß der Geraden g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$!

e) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2, bestimme ihren Abstand oder ihren Schnittpunkt und die Größe des Schnittwinkels!

10. Gegeben seien die Punkte $P_1(-2|1|-1)$, $P_2(1|-3|-2)$, $P_3(-3|1|2)$ und $P_4(5|1|6)$, ferner die Ebene ε_1 zu $x-3y+2z=1$.

a) Ermittle eine Normalengleichung für die Ebene ε_2 durch die Punkte P_1, P_2 und P_3!

b) Vom Punkt P_4 sei das Lot auf die Ebene ε_2 gefällt. Ermittle eine Gleichung der Geraden g_1, in der dieses Lot liegt!

c) Untersuche die gegenseitige Lage von ε_2 und g_1 und berechne den Abstand des Punktes P_4 von der Ebene ε_2!

d) Zeige, daß sich die Ebenen ε_1 und ε_2 in einer Geraden schneiden, und ermittle eine Gleichung für die Schnittgerade g_2!

e) Ermittle Gleichungen für Aufriß, Grundriß und Seitenriß der Geraden g_2!

f) Zeige, daß man aus den Gleichungen für Aufriß und Seitenriß die Gleichung für den Grundriß herleiten kann!

g) Ermittle die Größe des Schnittwinkels zwischen ε_1 und ε_2!

11. Gegeben seien die Punkte $P_1(-3|2|-1)$, $P_2(-5|1|-2)$, $P_3(5|1|0)$ und $P_4(4|2|-1)$, ferner die Ebene ε_1 zu $3x-y+2z=8$.

a) Ermittle Gleichungen der Geraden g_1 durch P_1, P_2 und der Geraden g_2 durch P_3, P_4!

b) Zeige, daß g_1 und g_2 windschief sind und berechne den Abstand der beiden Geraden mit Hilfe des 1) Projektionsverfahrens, 2) Lotfußpunktverfahrens!

c) Untersuche die gegenseitige Lage von g_1 und ε_1, berechne den Abstand oder den Schnittpunkt und die Größe des Schnittwinkels!

d) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε_2, die die Gerade g_1 und den Punkt P_4 enthält! Welche besondere Lage hat diese Ebene ε_2?

e) Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen ε_1 und ε_2, berechne den Abstand oder die Schnittgerade und die Größe des Schnittwinkels!

12. Die Punkte $P_1(1|0|-1)$, $P_2(2|-1|-3)$ und $P_3(1|1|2)$ bestimmen eine Ebene ε_1, die Gleichung $2x-y+z=4$ eine Ebene ε_2.

a) Ermittle eine Normalengleichung für die Ebene ε_1!

b) Untersuche die gegenseitige Lage von ε_1 und ε_2, berechne entweder den Abstand oder die Schnittgerade und die Größe des Schnittwinkels!

13. Die Geraden g_1 und g_2 seien festgelegt durch

$$g_1\colon\ P_1(0|1|0),\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix};\qquad g_2\colon\ P_2(2|4|0),\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Zeige, daß die Geraden g_1 und g_2 windschief sind!

b) Die Ebene ε enthalte die Gerade g_1 und verlaufe parallel zu g_2. Ermittle den Abstand des Punktes $P(4|6|5)$ von der Ebene ε!

c) Ermittle den Abstand der beiden Geraden g_1 und g_2 und bestimme eine Gleichung der Geraden g, in der das gemeinsame Lot von g_1 und g_2 liegt!

d) Untersuche, ob es eine Gerade h gibt, die durch den Punkt $P(6|2|8)$ geht und die Geraden g_1 und g_2 schneidet!

14. Gegeben seien g_1 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$ und g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-1\\6\end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß die Geraden g_1 und g_2 windschief sind!

b) Bestimme für die Ebene ε_1, die g_2 enthält und parallel zu g_1 verläuft, eine Parameter- und eine Normalengleichung! Welche Schnittpunkte hat ε_1 mit den Koordinatenachsen?

c) Welchen Abstand hat die Gerade g_1 von der Ebene ε_1? Bestimme eine Gleichung der Geraden g_1', die bezüglich der Ebene ε_1 spiegelbildlich zu g_1 liegt!

d) Durch die Geraden g_1 und g_1' ist eine Ebene ε_2 bestimmt. Ermittle eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen ε_1 und ε_2 und die Größe ihres Schnittwinkels!

15. Gegeben seien die Punkte $P_1(3|2|-1)$ und $P_2(7|-2|3)$, ferner die Gerade g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ und eine Ebene ε_1 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}6\\-3\\3\end{pmatrix}$.

a) Ermittle eine Gleichung der durch g und P_2 bestimmten Ebene ε_2 und eine Gleichung der Schnittgeraden g_S der Ebenen ε_1 und ε_2!

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene ε_3, die auf der Schnittgeraden g_S senkrecht steht und durch P_1 geht!

c) In der Ebene ε_3 sei h diejenige Gerade, die parallel zu y-z-Ebene verläuft und durch den Punkt $Q(4|7|2)$ geht. Ermittle eine Gleichung von h, berechne ihren Abstand vom Nullpunkt und zeige, daß die Ebene ε_4, die den Punkt P_2 enthält und auf h senkrecht steht, auch den Punkt P_1 enthält!

d) Zeige, daß alle Ebenen der Schar $\varepsilon(k)\colon (2-k)x+8y+(4+2k)z=10+3k$ (mit $k\in\mathbb{R}$) die Schnittgerade g_S von ε_1 und ε_2 enthalten! Ermittle die Werte k_1 und k_2, für die sich die Ebenen ε_1 und ε_2 ergeben!

e) Berechne $k\in\mathbb{R}$ so, daß die Ebene $\varepsilon(k)$ auf der Ebene ε_1 senkrecht steht!

16. Gegeben sind eine Gerade g, eine Ebenenschar $\varepsilon(k)$ und eine Ebene ε_1 durch:

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\22\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\23\\6\end{pmatrix};\quad \varepsilon(k)\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\k+5\\1\end{pmatrix};\quad \varepsilon_1\colon 3x-2y+6z=28.$$

a) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε_2 durch g und den Punkt $P(4|-8|0)$!

b) Berechne den Abstand des Punktes $Q(7|-1|9)$ von der Ebene ε_1 und ermittle den Spiegelpunkt Q' von Q bezüglich der Ebene ε_1!

c) Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g_S von ε_1 und ε_2! Berechne ferner die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und g_S!

d) Die Ebenen der Schar $\varepsilon(k)$ enthalten eine gemeinsame Gerade. Bestimme eine Gleichung dieser Geraden und zeige, daß sie auch in der Ebene ε_3 zu $14x-6y+23z=104$ liegt! Ist ε_3 in der Schar $\varepsilon(k)$ enthalten?

17. Drei Ebenen seien gegeben durch $\varepsilon_1\colon 3x+4y+3z=24$, $\varepsilon_2\colon x-2y+z=8$ und $\varepsilon_3\colon -12x+4y+3z=24$.

a) Untersuche die wechselseitige Lage der Ebenen zueinander!

b) Bestimme ggf. die Schnittgeraden von ε_1 und ε_2 und von ε_1 und ε_3! Kann man über die Lage dieser Schnittgeraden eine Aussage machen?

c) Untersuche die gegenseitige Lage der ermittelten Schnittgeraden!

d) Ermittle die Gleichungen der Spurgeraden der Ebene ε_1 in den Koordinatenebenen!

18. Gegeben sind zwei Ebenen ε_1, ε_2 und eine Ebenenschar $\varepsilon(k)$ mit $k\in\mathbb{R}$ durch:
$\varepsilon_1\colon -2x+y-z=-4$; $\varepsilon_2\colon x+y+2z=8$; $\varepsilon(k)\colon 2x-y+kz=4$.

a) Untersuche, für welche Werte von $k\in\mathbb{R}$ sich die Ebenen der Schar mit ε_1 und ε_2 in genau einem Punkt schneiden? Ermittle den Schnittpunkt! Welche besondere Lage hat der Punkt?

b) Untersuche den Zusammenhang zwischen $\varepsilon(k)$ und ε_1 bzw. ε_2 in den Fällen, die in a) ausgeschlossen werden! Bestimme jeweils die Schnittgebilde!

c) Ermittle die Projektionen der in b) ermittelten Geraden in den drei Koordinatenebenen!

19. Gegeben sei die Ebene ε_1 durch $x-y-z=2$.

a) Ermittle die Gleichung der Ebene ε_2, die auf ε_1 senkrecht steht und durch die Punkte $P_1(0|1|1)$ und $P_2(2|-1|1)$ geht!

b) Ermittle die Gleichung der Schnittgeraden g_1 von ε_1 und ε_2!

c) Eine Ebenenschar $\varepsilon(k)$ mit $k\in\mathbb{R}$ sei gegeben durch $(k-1)x+(k+1)y+z=k-2$. Zeige, daß g_1 in jeder Ebene der Schar liegt!

d) Welche Paare aus der Ebenenschar $\varepsilon(k)$ stehen aufeinander senkrecht?

e) Ermittle eine Gleichung für die Gerade g_2, die auf g_1 senkrecht steht und durch den Punkt $P_3(3|-2|0)$ geht!

§ 12 Kreis und Kugel

I. Die Gleichungen von Kreis und von Kugel

1. Ein Kreis ist definiert als die Menge aller Punkte einer Ebene ε, die von einem Punkt M dieser Ebene die gleiche Entfernung r haben; man nennt M den **„Mittelpunkt"** und r den **„Radius des Kreises".** Wir bezeichnen einen Kreis kurz mit „K(M; r)", gelesen „Kreis um M mit dem Radius r" (Bild 12.1).

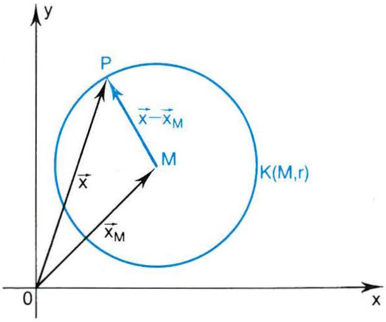


Bild 12.1

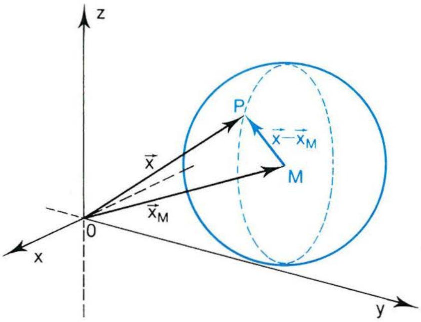


Bild 12.2

Entsprechend ist eine **Kugel** definiert als die Menge der Punkte im R_3, die von einem Punkt M die gleiche Entfernung r haben; man nennt auch hier den Punkt M den **„Mittelpunkt"** und r den **„Radius der Kugel".** Wir bezeichnen auch eine Kugel mit „K(M; r)", gelesen „Kugel um M mit dem Radius r" (Bild 12.2).
Ob mit K(M; r) ein Kreis oder eine Kugel gemeint ist, ergibt sich jeweils aus dem Zusammenhang.
Beachte: Unter einem **„Kreis"** verstehen wir also die **Kreislinie,** nicht etwa die Kreisfläche; unter einer **„Kugel"** verstehen wir eine **Fläche,** nicht etwa einen Körper; man spricht manchmal auch von der „Kugeloberfläche".

2. Für alle Punkte P, die auf einem Kreis bzw. auf einer Kugel liegen, haben die Pfeile $\overrightarrow{MP}$ die gleiche Länge r: $|\overrightarrow{MP}|=r$. Erfüllt umgekehrt ein Punkt P diese Bedingung, so liegt er auf dem Kreis bzw. auf der Kugel; es gilt also:

$$P \in K(M; r) \Leftrightarrow |\overrightarrow{MP}| = r.$$

Wie die Bilder 12.1 und 12.2 zeigen, läßt sich für jeden Punkt P auf K der Vektor zum Pfeil $\overrightarrow{MP}$ durch die Differenz $\vec{x}-\vec{x}_M$ der beiden Ortsvektoren $\vec{x}_M$ zu M und $\vec{x}$ zu P darstellen.
Es gilt also: $|\vec{x}-\vec{x}_M|=r$.
Daraus ergibt sich durch Quadrieren $|\vec{x}-\vec{x}_M|^2=r^2$ und nach Satz S 8.1: $(\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_M)=r^2$.
Zur Abkürzung der Schreibweise machen wir von jetzt ab von der Vereinbarung Gebrauch, statt $\vec{a}\cdot\vec{a}$ kurz $\vec{a}^2$ zu schreiben; dann gilt für alle Punkte des Kreises bzw. der Kugel:

$$\boldsymbol{(\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2.}$$

Für den Sonderfall, daß der Mittelpunkt des Kreises bzw. der Kugel der Nullpunkt des Koordinatensystems, also $\vec{x}_M = \vec{0}$ ist, ergibt sich daraus:

$$\vec{x}^2 = r^2.$$

Damit haben wir gezeigt:

S 12.1 Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ liegt genau dann auf dem Kreis bzw. auf der Kugel K(M; r), wenn gilt:

$$(\vec{x} - \vec{x}_M)^2 = r^2.$$

Diese Gleichung heißt daher „Kreisgleichung" bzw. „Kugelgleichung". Ist M der Nullpunkt des Koordinatensystems, so lautet die Gleichung:

$$\vec{x}^2 = r^2.$$

Bemerkung: Man kann die allgemeine Kreis- oder Kugelgleichung $(\vec{x} - \vec{x}_M)^2 = r^2$ auf den Sonderfall $\vec{x}^2 = \vec{r}$ dadurch zurückführen, daß man eine Verschiebung mit dem Vektor $\vec{x}_M$ durchführt. Daher nennt man $(\vec{x} - \vec{x}_M)^2 = r^2$ auch die **„Verschiebungsform"** und $\vec{x}^2 = r^2$ die **„Ursprungsform"** der Kreis- bzw. Kugelgleichung.
Beachte, daß mit einer solchen Gleichung in zwei Variablen nur Kreise erfaßt werden, die in der x-y-Ebene liegen, nicht aber Kreise, die irgendwo im R_3 liegen!

3. Kreis- und Kugelgleichung unterscheiden sich in der vektoriellen Schreibweise nicht. Der Unterschied besteht nur darin, daß in einem Falle P und M Punkte einer Ebene (des R_2), im anderen Falle dagegen des Raumes (des R_3) sind. Überträgt man die Gleichungen in die Koordinatenschreibweise, so wird der Unterschied sichtbar. Diese Gleichungen lauten:

	Verschiebungsform	Ursprungsform
Kreis	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = r^2$
Kugel	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Beispiele:

1) Die Gleichung des Kreises um $M(-2|5)$ mit $r = 3$ lautet: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 9$.

2) Die Gleichung der Kugel um $M(4|-1|-3)$ mir $r = 6$ lautet: $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 36$.

4. Durch Ausmultiplizieren der Gleichungen der beiden vorstehenden Beispiele erhält man:

zu 1): $(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0;$

zu 2): $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 + 6z + 9) = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z - 10 = 0.$

Man kann diese Gleichungen auch vektoriell schreiben:

zu 1): $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 20 = 0;$ **zu 2):** $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 10 = 0.$

Ist umgekehrt eine Gleichung in dieser Form

$$\vec{x}^2+\vec{p}\cdot\vec{x}+q=0$$

gegeben, so stellt sich die Frage, ob es sich um eine Kreis- bzw. eine Kugelgleichung handelt.

Beispiel: $\vec{x}^2+\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}-12=0,\quad$ also: $x^2+y^2+z^2+4x-6y-12=0.$

Wenn es sich hier um eine Kugelgleichung handelt, dann muß sie sich durch Äquivalenzumformungen auf die Form

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=r^2$$

bringen lassen. Es liegt nahe, bei den einzelnen Variablen das Verfahren der quadratischen Ergänzung anzuwenden. Wir erhalten:

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)+z^2=12+4+9 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z-0)^2=25=5^2.$$

Dies ist also in der Tat die Gleichung einer Kugel um den Mittelpunkt $M(-2|3|0)$ mit dem Radius $r=5$.

5. Allgemein können wir das am Beispiel durchgeführte Verfahren folgendermaßen beschreiben. Die quadratische Ergänzung zur Gleichung

$$\vec{x}^2+\vec{p}\cdot\vec{x}=-q$$

lautet in vektorieller Form: $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2$. Man erhält:

$$\vec{x}^2+\vec{p}\cdot\vec{x}+\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2=\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q \Leftrightarrow \left(\vec{x}+\frac{\vec{p}}{2}\right)^2=\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q.$$

Diese Gleichung ist genau von der Form $(\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2$, wenn $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q>0$ ist.

In diesem Falle gilt für den Mittelpunkt M: $\vec{x}_M=-\frac{\vec{p}}{2}$

und für den Radius: $r=\sqrt{\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q}$.

Damit haben wir gezeigt:

S 12.2 Eine quadratische Gleichung der Form $\vec{x}^2+\vec{p}\cdot\vec{x}+q=0$ ist genau dann eine Kreis- bzw. Kugelgleichung, wenn $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q>0$ ist. Mittelpunkt M und Radius r sind dann bestimmt durch:

$$\vec{x}_M=-\frac{\vec{p}}{2} \quad \text{und} \quad r=\sqrt{\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2-q}.$$

Bemerkung: Gilt $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2=q$, so „schrumpfen“ der Kreis bzw. die Kugel auf einen Punkt, den Mittelpunkt, zusammen.

Beispiele:

1) $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 6 = 0$

Es ist $\frac{\vec{p}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, also $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(4+25) = \frac{29}{4}$.

Also gilt: $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2 - q = \frac{29}{4} - \frac{24}{4} = \frac{5}{4} > 0$.

Die Gleichung stellt also einen Kreis mit $\vec{x}_M = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$ dar (Bild 12.3).

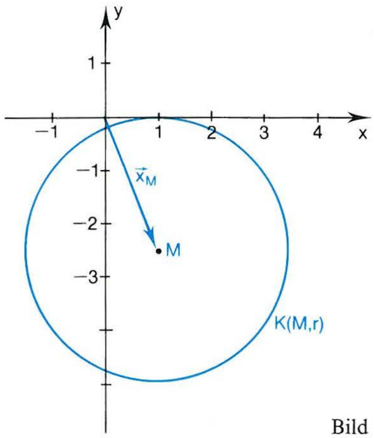


Bild 12.3

2) $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 16 = 0$.

Es ist $\frac{\vec{p}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2 = 4+1+9 = 14$. Also gilt: $\left(\frac{\vec{p}}{2}\right)^2 - q = 14 - 16 = -2 < 0$.

Also wird durch diese Gleichung **keine** Kugel dargestellt.

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle zum Kreis K(M; r) Gleichungen nach den Sätzen S 12.1 und S 12.2!

a) $M(1|2)$; $r = 5$ **b)** $M(-2|3)$; $r = 10$ **c)** $M(-6|-3)$; $r = 13$

Liegen $A(6|2)$, $B(4|-5)$, $C(6|-3)$, $D(4|-2)$ und $E(8|3)$ auf, innerhalb oder außerhalb der Kreise K(M; r)?

2. Ermittle zur Kugel K(M; r) Gleichungen nach den Sätzen S 12.1 und S 12.2!

a) $M(-2|1|3)$; $r = 3$ **b)** $M(-2|0|3)$; $r = 9$ **c)** $M(1|-4|4)$; $r = 7$

Liegen $A(-1|3|1)$; $B(2|1|-5)$; $C(3|-1|-2)$; $D(-3|-1|5)$; $E(-1|2|1)$ und $F(6|-4|2)$ auf, innerhalb oder außerhalb der Kugel K(M; r)?

3. Handelt es sich bei den folgenden Gleichungen um Kreis- bzw. um Kugelgleichungen?

a) $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 21 = 0$ **b)** $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 45 = 0$ **c)** $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 4 = 0$

d) $\left[\vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 - 81 = 0$ **e)** $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 5 = 0$ **f)** $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 16 = 0$

g) $x^2 + y^2 + 8y + 20 = 0$ **h)** $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 3$ **i)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 8y - 4z = 4$

j) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z = -29$ **k)** $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4z + 10 = 0$

4. Eine Kugel um den Nullpunkt geht durch den Punkt P. Ermittle die Kugelgleichung und untersuche, ob die Punkte $A(4|8|-1)$, $B(4|12|-3)$, $C(0|12|-5)$, $D(-2|4|-4)$ und $E(2|-6|-3)$ auf, innerhalb oder außerhalb der Kugel liegen!

a) $P(2|-6|3)$ **b)** $P(-12|3|-4)$ **c)** $P(-4|-1|8)$ **d)** $P(-4|2|4)$.

5. Gegeben ist die Kugel zu $x^2+y^2+z^2-2x+14y-4z=67$. Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes P so, daß P auf der Kugel liegt!

a) $P(-1|2|z)$, $z>0$ **b)** $P(7|y|4)$, $y>0$ **c)** $P(x|-5|8)$, $x<0$

6. Von einer Kugel ist ein Durchmesser AB gegeben. Ermittle die Gleichung der Kugel in Koordinatenform und in Vektorform!

a) $A(10|-4|11)$, $B(-6|-6|3)$ **b)** $A(5|-4|7)$, $B(1|8|1)$

7. Bestimme Mittelpunkt und Radius des Umkreises des Dreiecks ABC!

a) $A(7|0)$, $B(-5|0)$, $C(-7|-2)$ **b)** $A(-2|-2)$, $B(4|6)$, $C(5|-1)$

8. Ermittle die Gleichung des Kreises, der durch $A(-1|-8)$ geht und die x-Achse im Punkt $B(3|0)$ berührt! Geht der Kreis durch $C(6|-1)$?

9. Ermittle Mittelpunkt und Radius eines Kreises, der

a) beide Koordinatenachsen berührt und durch $P(1|8)$ geht,

b) die x-Achse berührt und durch $A(-1|-1)$ und $B(6|-8)$ geht,

c) die y-Achse berührt und durch $A(8|5)$ und $B(1|-2)$ geht!

10. Ein Kreis geht durch die Punkte P und Q, sein Mittelpunkt hat von der x-Achse den Abstand a. Ermittle die Kreisgleichung!

a) $P(-2|0)$, $Q(6|0)$; $a=3$ **b)** $P(-2|-1)$, $Q(5|6)$; $a=2$ **c)** $P(5|6)$, $Q(9|2)$; $a=2$

11. Wie lauten die Gleichungen aller Kugeln, die eine der drei Koordinatenebenen im Nullpunkt berühren und den Radius $r=6$ haben?

12. Beschreibe durch eine Ungleichung die Mengen aller Punkte, die **1)** innerhalb und **2)** außerhalb des Kreises (der Kugel) liegen!

a) $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ **b)** $x^2+y^2+z^2-4x+8y-2z=0$

13. Untersuche, in welchen Gebilden die Kugel die drei Koordinatenebenen schneidet!

a) $M(-6|-2|3)$, $r=7$ **b)** $x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z=29$

c) $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\-6\\-2\end{pmatrix}\right]^2=36$ **d)** $\vec{x}^2+\begin{pmatrix}8\\-6\\0\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+16=0$ **e)** $\vec{x}^2+\begin{pmatrix}-4\\6\\-12\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=0$

14. Welche Punktmengen werden durch die folgenden Aussageformen beschrieben?

a) $x^2+y^2-2x+2y-13\geq 0$ **b)** $x^2+y^2+4x+6y-12>0$

c) $x^2+y^2+z^2-2x+8y-4z\leq 4$ **d)** $x^2+y^2+z^2-4x-12y+6z+45\geq 0$

e) $x^2+y^2+z^2<144 \wedge x>0$ **f)** $x^2+y^2+z^2-81>0 \wedge x<0 \wedge y>0$

15. Kreise (Kugeln) heißen „konzentrisch", wenn sie denselben Mittelpunkt haben. Untersuche über die vektorielle Verschiebungsform, welche Bedingungen die Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 und d_2 erfüllen müssen, damit die Kreise bzw. die Kugeln konzentrisch sind!

a) $x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$
$x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$

b) $x^2+y^2+z^2+a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
$x^2+y^2+z^2+a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

16. Eine Kugel hat den Radius r, sie berührt die x-y-Ebene und die x-z-Ebene und verläuft durch den Punkt P. Ermittle die Verschiebungsgleichung der Kugel! Liegt die Kugel im I. Oktanten? **a)** $r=9$, $P(6|5|2)$ **b)** $r=13$, $P(5|9|1)$

17. Zwei Punkte P_1 und P_2 im R_2 sind gegeben durch die Ortsvektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$.

a) Zeige, daß durch die Gleichung $(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)=0$ ein Kreis beschrieben wird!

b) Drücke Mittelpunkt und Radius durch $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ aus!

c) Welcher Lehrsatz wird durch die Gleichung $(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)=0$ ausgedrückt?

d) Interpretiere die Gleichung $(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)=0$ für Vektoren des R_3!

II. Schnittpunkte von Geraden mit Kreisen und mit Kugeln

1. Eine Gerade kann sowohl mit einem Kreis wie mit einer Kugel zwei Punkte, einen Punkt oder gar keinen Punkt gemeinsam haben (Bilder 12.4 und 12.5). Man spricht in diesen Fällen von einer **„Sekante"**, [1]) einer **„Tangente"** [2]) oder einer **„Passante"**. [3])

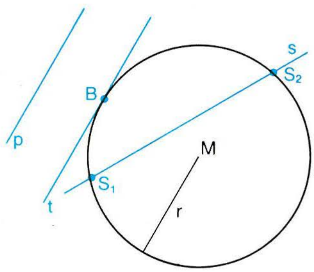


Bild 12.4

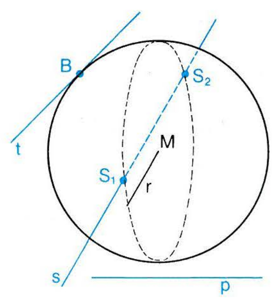


Bild 12.5

Wir wollen im folgenden untersuchen, wie sich diese drei Fälle rechnerisch unterscheiden und wie man gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte berechnen kann.

2. Die Gerade sei gegeben durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$$

und der Kreis (bzw. die Kugel) durch eine Gleichung der Form

$$(\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2.$$

---

[1]) secans (lat.), schneidend; [2]) tangens (lat.), berührend; [3]) passant (frz.), vorübergehend

Die Koordinaten der Schnittpunkte müssen beide Gleichungen erfüllen; daher muß gelten:

$$(\vec{x}_0+t\vec{a}-\vec{x}_M)^2=r^2 \Leftrightarrow [t\vec{a}+(\vec{x}_0-\vec{x}_M)]^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}^2t^2+2(\vec{x}_0-\vec{x}_M)\cdot\vec{a}t+(\vec{x}_0-\vec{x}_M)^2=r^2$$
$$\Leftrightarrow \vec{a}^2t^2+2(\vec{x}_0-\vec{x}_M)\cdot\vec{a}t+(\vec{x}_0-\vec{x}_M)^2-r^2=0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für den Parameter t. Je nach dem Wert der Diskriminate dieser Gleichung kann die Gleichung zwei Lösungen, eine oder keine Lösung haben. Dies entspricht den drei möglichen Fällen, daß die Gerade eine Sekante, eine Tangente oder eine Passante sein kann.

3. Wir behandeln einige **Beispiele.**

1) Gegeben: Kreis mit $\vec{x}_M=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $r=5$ und drei Geraden g_1, g_2 und g_3 mit

$$\vec{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\ \vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\quad \vec{x}_2=\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix};\quad \vec{x}_3=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix},\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Mit $\vec{a}_1^2=2$, $\vec{x}_1^2=5$ und $\vec{x}_1\cdot\vec{a}_1=-3$ erhält man für t die Gleichung:

$$2t^2-6t-20=0 \Leftrightarrow t^2-3t-10=0 \Leftrightarrow t=5 \lor t=-2.$$

Aus der Geradengleichung ergeben sich für die Schnittpunkte die Ortsvektoren $\vec{x}_4=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ und $x_5=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Die Gerade g_1 ist eine **Sekante** des Kreises (Bild 12.6).

b) Mit $\vec{a}_2^2=25$, $\vec{x}_2^2=50$ und $\vec{x}_2\cdot\vec{a}_2=25$ erhält man:

$$25t^2+50t+25=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

Für den Schnittpunkt ergibt sich: $\vec{x}_6=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$. Die Gerade g_2 ist eine Tangente an den Kreis mit dem Berührungspunkt $P_6(3|4)$ (Bild 12.7).

c) Mit $\vec{a}_3^2=2$; $\vec{x}_3^2=41$ und $\vec{x}_3\cdot\vec{a}_3=-1$ erhält man: $2t^2-2t+16=0 \Leftrightarrow t^2-t+8=0$.

Es gilt $D=\frac{1}{4}-8<0$; die Gleichung hat keine Lösung; daher ist die Gerade g_3 eine Passante des Kreises (Bild 12.8).

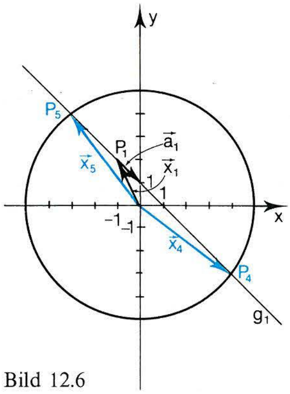


Bild 12.6

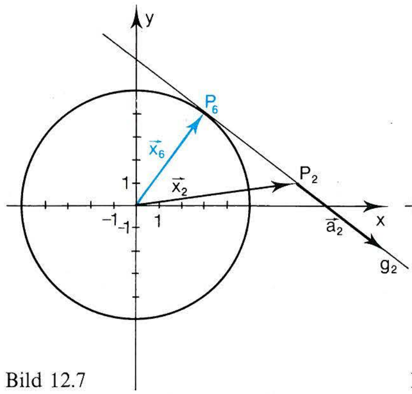


Bild 12.7

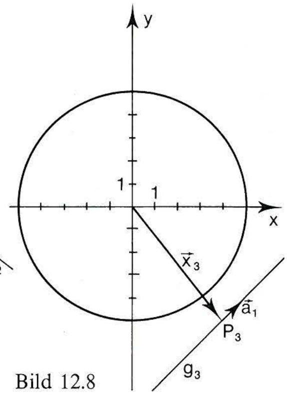


Bild 12.8

2) Gegeben: Kugel mit $\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $r=7$; Gerade mit $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Mit $\vec{a}^2 = 29$; $(\vec{x}_0 - \vec{x}_M)^2 = 20$ und $(\vec{x}_0 - \vec{x}_M) \cdot \vec{a} = 0$ erhält man:

$$29t^2 - 29 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -1.$$

Daraus ergibt sich für die Schnittpunkte: $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; die Gerade ist eine Sekante der Kugel.

4. Wenn die Gleichung einer Geraden in der Koordinatenebene in der **Normalenform** gegeben ist, dann kann man daraus eine Parametergleichung für die Gerade ermitteln und das oben beschriebene Verfahren anwenden. Man kann aber auch mit der Normalengleichung selbst arbeiten.

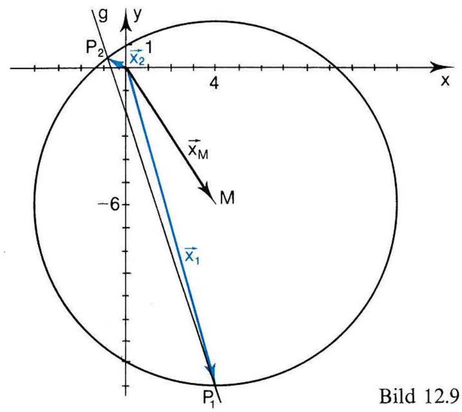


Bild 12.9

Beispiel:

Gegeben: K: $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 64$

g: $3x + y = -2$.

Es gilt: $3x + y = -2 \Leftrightarrow y = -3x - 2$.

Durch Einsetzen in die Kreisgleichung erhält man:

$$(x-4)^2 + (-3x+4)^2 = 64 \Leftrightarrow x^2 - 3{,}2x - 3{,}2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -0{,}8.$$

Aus der Geradengleichung erhält man die Ortsvektoren für die Schnittpunkte:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} \quad \text{(Bild 12.9).}$$

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle die Schnittpunkte zwischen Gerade g und Kreis K!

a) g: $\vec{x} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, K: $\vec{x}^2 = 25$ **b)** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2 = 34$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; K: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 25$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 13 = 0$

e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 12$

f) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2 + 4 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$

2. Ermittle die Schnittpunkte zwischen Gerade g und Kugel K!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-6\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; K: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\8\\2\end{pmatrix}\right]^2=169$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2+\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=35$

3. Berechne die Schnittpunkte zwischen Kreis (Kugel) K und Geraden g!

a) K: $x^2+4x+y^2-2y-5=0$; g_1: $3x-y=5$; g_2: $x+3y+9=0$

b) K: $M(0|0|0)$, $r=11$; g durch $A(6|10|0)$ und $B(6|9|2)$

c) K: $M(-9|6|-10)$, $r=17$; g durch $A(3|0|5)$ und $B(3|-7|8)$

d) K: $x^2+y^2+z^2-6x+4y+12z+40=0$; g: durch $A(1|-6|-3)$ und $B(1|-5|-5)$

4. Durch die Schnittpunkte zwischen der Geraden g und dem Kreis (der Kugel) K wird eine Sehne bestimmt. Berechne ihre Länge und ihren Mittelpunkt!

a) g: $2x-y-5=0$; K: $x^2+y^2=25$ **b)** g: $-x+3y-5=0$; K: $x^2+y^2=5$

c) g durch $A(6|2|9)$ und $B(6|0|10)$; K: $x^2+y^2+z^2=121$

d) g durch $A(4|-5|9)$ und $B(2|1|1)$; K: $M(-2|1|3)$, $r=7$

5. Auf Seite 223 des Lehrtextes ist die Gleichung für die Schnittpunkte einer Geraden zu $\vec{x}=\vec{x}_0+t\vec{a}$ und eines Kreises K zu $(\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2$ hergeleitet. Zeige, daß für den Sonderfall $\vec{x}_M=\vec{0}$ eine Tangente genau dann vorliegt, wenn gilt: $\vec{x}_0^2\vec{a}^2-(\vec{x}_0\cdot\vec{a})^2=r^2\vec{a}^2$!

6. Gegeben sind der Kreis zu $\vec{x}^2=400$ und ein Punkt $P(16|y)$ auf dem Kreis mit $y>0$. Durch P ist eine Sekante zu legen, die zu der Geraden zu $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=14$ parallel ist. Wie lautet die Gleichung der Sekanten?

7. a) Begründe, daß durch die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}s\\-s\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$ für $s\in\mathbb{R}$ eine Schar paralleler Geraden gegeben ist!

b) Für welche Werte von s sind die Geraden Sekanten, Tangenten oder Passanten an die Kugel zu $\vec{x}^2=16$? Ermittle die Gleichungen der Tangenten!

8. Gegeben ist die Kugel zu $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right]^2=9$, ferner die Geradenschar zu $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\s\\0\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$.

a) Für welche Werte von s sind die Geraden Sekanten, Passanten oder Tangenten?

b) Ermittle die Gleichungen der Tangenten!

9. Untersuche, welche Geraden aus der Schar zu $\vec{x}=t\begin{pmatrix}0\\s\\1\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$ Sekanten, Tangenten oder Passanten an die Kugel zu $x^2+y^2+z^2-8y-6z+16=0$ sind!

10. Ermittle eine Bedingung für die Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis zu $\vec{x}^2=100$ aus der Geradenschar zu $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=s$ für $s\in\mathbb{R}$ ausschneidet!

11. a) Begründe, daß durch die Gleichung zu $\vec{n}\cdot\vec{x}=s$ für $s\in\mathbb{R}$ eine Schar von untereinander parallelen Geraden gegeben ist!
b) Für welche Werte von $s\in\mathbb{R}$ sind die Geraden g Sekanten, Tangenten oder Passanten an den Kreis K?

1) g: $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=s$ K: $\vec{x}^2=2$

2) g: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=s$ K: $\vec{x}^2=5$

3) g: $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=s$ K: $\vec{x}^2=25$

12. Welche Geraden der Schar zu $\begin{pmatrix}s\\1\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=7-s$ mit $s\in\mathbb{R}$ berühren den Kreis zu $\vec{x}^2=25$?

13. Welche Geraden der Schar zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\s\\s\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$ sind Tangenten an die Kugel zu $\vec{x}^2+\begin{pmatrix}-6\\0\\-2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}+6=0$? Für welche Werte von s sind die Geraden Sekanten oder Passanten?

14. Gegeben sind die Kugel zu $\vec{x}^2=15$ und die Schar der Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}s\\2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ für $s\in\mathbb{R}$.
a) Bestimme s so, daß die Geraden Tangenten an die Kugel sind!
b) Sind die gefundenen Tangenten parallel? Welchen Abstand haben sie?

15. Ermittle eine Gleichung des Kreises, der durch die beiden Punkte $A(-2|5)$ und $B(-1|-2)$ geht und dessen Mittelpunkt auf der Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ liegt!

16. Beweise den Sehnen- und den Sekantensatz: Schneiden Sehnen (Sekanten), die durch den Punkt A gehen, einen Kreis in zwei Punkte P und Q, so hat das Produkt $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|$ unabhängig von der Richtung der Sehne (Sekante) stets denselben Wert.
Anleitung: Bringe den Kreis zu $\vec{x}^2=r^2$ mit der Geraden zu $\vec{x}=\vec{x}_A+t\vec{a}$ (mit $|\vec{a}|=1$) zum Schnitt und drücke $|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|$ durch die Parameterwerte t_P und t_Q der beiden Schnittpunkte aus!

17. Untersuche, von welchen Punkten der Geraden zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ man die Strecke PQ mit $P(0|1|2)$, $Q(-4|5|0)$ unter einem rechten Winkel sieht!
Zeige, daß diese Punkte auf einer Kugel mit dem Durchmesser $|PQ|$ liegen!

III. Tangenten und Tangentialebenen

1. Eine Tangente an einen Kreis bzw. an eine Kugel ist – wie wir im vorigen Abschnitt festgestellt haben – eine Gerade, die mit dem Kreis bzw. mit der Kugel genau einen Punkt gemeinsam hat, die den Kreis bzw. die Kugel in diesem Punkt „berührt“. Mit Mitteln der Elementargeometrie läßt sich zeigen, daß jede Tangente auf dem zugehörigen Berührradius senkrecht steht.
Wir ermitteln zunächst die Gleichung einer Tangente für einen **Kreis um den Nullpunkt,** also für einen Kreis mit der Gleichung $\vec{x}^2=r^2$.

Wir bezeichnen den Berührpunkt zwischen Kreis und Tangente mit B und den zugehörigen Ortsvektor mit $\vec{x}_B$ (Bild 12.10). Den Ortsvektor zum „laufenden" Punkt P der Tangente bezeichnen wir – wie üblich – mit $\vec{x}$. Dann ist der Differenzvektor $\vec{x}-\vec{x}_B$ ein Richtungsvektor der Geraden, er ist also orthogonal zu $\vec{x}_B$; folglich gilt:

$$(\vec{x}-\vec{x}_B)\cdot\vec{x}_B=0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}\cdot\vec{x}_B=\vec{x}_B^2.$$

Da B ein Kreispunkt ist, muß er der Kreisgleichung $\vec{x}^2=r^2$ genügen, d.h. es gilt: $\vec{x}_B^2=r^2$. Wir setzen dies in die obige Gleichung ein und erhalten:

$$\mathbf{\vec{x}\cdot\vec{x}_B=r^2.}$$

Dies ist die Gleichung der Tangente an den Kreis im Punkt B, und zwar in Normalenform; der Normalenvektor ist $\vec{x}_B$.

Beispiel:

Für $\vec{x}^2=25$ und $\vec{x}_B=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ lautet die Tangentengleichung:

$$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}=25, \quad \text{also } 3x-4y=25 \quad \text{(Bild 12.11).}$$

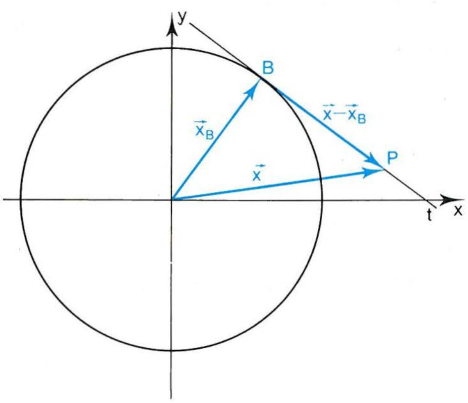


Bild 12.10

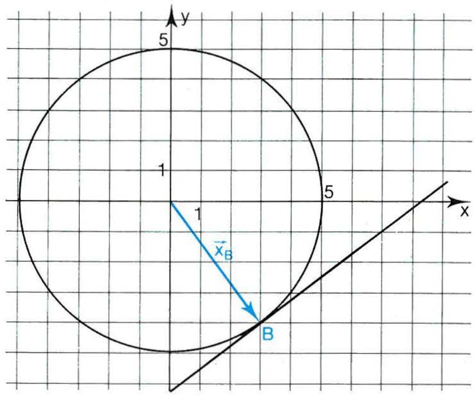


Bild 12.11

2. Für einen **Kreis mit dem Mittelpunkt M** und dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_M$ lautet die Kreisgleichung $(\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2$. Man erhält die Tangentengleichung zum Punkt B mit dem Ortsvektor $\vec{x}_B$ für diesen Fall aus der Gleichung

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_B=r^2$$

dadurch, daß man die Verschiebung um $\vec{x}_M$ bei $\vec{x}$ und bei $\vec{x}_B$ berücksichtigt, also

$$\vec{x} \text{ durch } \vec{x}-\vec{x}_M \quad \text{und} \quad \vec{x}_B \text{ durch } \vec{x}_B-\vec{x}_M$$

ersetzt:

$$\mathbf{(\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)=r^2.}$$

Man kann diese Gleichung auch folgendermaßen herleiten (Bild 12.12). Der Vektor $\vec{x}-\vec{x}_B$ ist ein Richtungsvektor der Tangente; der Vektor $\vec{x}_B-\vec{x}_M$ liegt in Richtung des Berührradius; die beiden Vektoren sind also zueinander orthogonal; es gilt also:

$$(\vec{x}-\vec{x}_B)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)=0.$$

Da B ein Punkt des Kreises ist, gilt für seinen Ortsvektor $\vec{x}_B$ außerdem:

$$(\vec{x}_B-\vec{x}_M)^2=r^2.$$

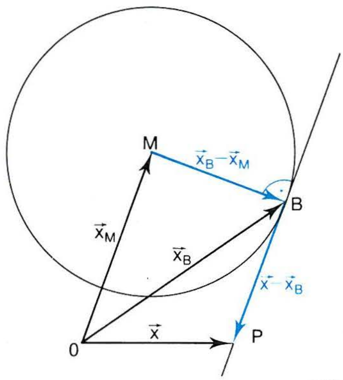


Bild 12.12

Wir addieren die beiden Gleichungen und erhalten:

$$(\vec{x}-\vec{x}_B)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)+(\vec{x}_B-\vec{x}_M)^2=r^2$$

$$\Leftrightarrow\quad (\vec{x}-\vec{x}_B+\vec{x}_B-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)=r^2 \quad \text{(Distributivgesetz)}$$

$$\Leftrightarrow\quad (\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)=r^2.$$

Wir fassen zusammen:

S 12.3 Die Gleichung der Tangente an einen Kreis K zu

$$\vec{x}^2=r^2 \quad\Big|\quad (\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2$$

im Punkte B mit dem Ortsvektor $\vec{x}_B$ ist:

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_B=r^2. \quad\Big|\quad (\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M)=r^2.$$

Beispiel:

Es sei $\vec{x}_M=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$; $r=10$ und $\vec{x}_B=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$.

Wir bestätigen zunächst, daß der Punkt B auf dem Kreis liegt:
Die Kreisgleichung lautet in Koordinatenschreibweise:

$$(x-3)^2+(y-4)^2=100.$$

Wir setzen $\vec{x}_B=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}$ ein:

$$(9-3)^2+(-4-4)^2=6^2+8^2=36+64=100.$$

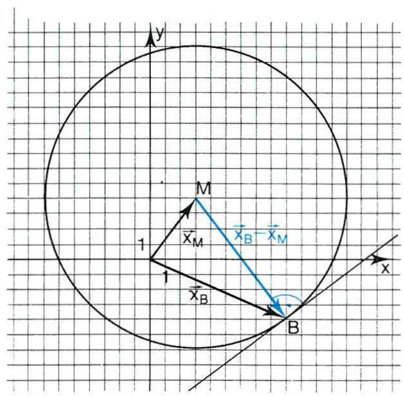


Bild 12.13

Nun ist: $\vec{x}_B-\vec{x}_M=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$. Die Tangentengleichung lautet also:

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}=100,$$

also: $\quad (x-3)\cdot 6+(y-4)\cdot(-8)=100 \Leftrightarrow 3x-4y=43 \quad$ (Bild 12.13).

3. Wird durch eine Gleichung der Form

$$\vec{x}^2 = r^2 \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x}-\vec{x}_M)^2 = r^2$$

eine **Kugel** dargestellt, so steht auch hier der Berührradius auf dem Richtungsvektor jeder Tangente senkrecht. Auf die gleiche Weise wie oben gelangt man also ebenfalls zu den Gleichungen

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_B = r^2 \quad \text{bzw.}$$

$$(\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M) = r^2.$$

Im Raum R_3 stellen diese Gleichungen aber keine Geraden, sondern **Ebenen** dar, und zwar in der Normalenform. Dies entspricht der Tatsache, daß es an eine Kugel in einem Punkt B unendlich viele Tangenten gibt, die alle in einer Ebene, der sogenannten **„Tangentialebene“**, liegen (Bild 12.14). Somit können wir sagen:

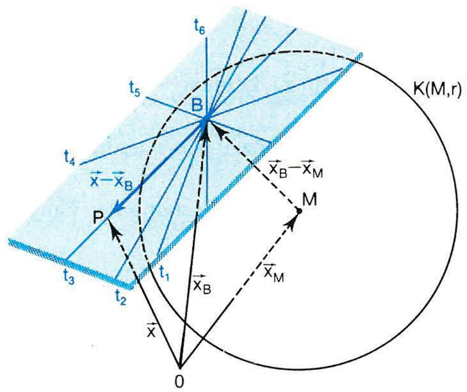


Bild 12.14

S 12.4 Die Gleichung einer Tangentialebene an eine Kugel zu

$\vec{x}^2 = r^2$	$(\vec{x}-\vec{x}_M)^2 = r^2$

im Punkte B mit dem Ortsvektor $\vec{x}_B$ ist:

$\vec{x}\cdot\vec{x}_B = r^2.$	$(\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_B-\vec{x}_M) = r^2.$

4. Wir behandeln **zwei Beispiele.**

1) Es sei $\vec{x}^2 = 81$ und $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Wir bestätigen zunächst, daß der Punkt B tatsächlich auf der Kugel liegt:

$$\vec{x}_B{}^2 = 16+49+16 = 81.$$

Die Gleichung der Tangentialebene im B lautet: $\vec{x}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = 81 \Leftrightarrow 4x+7y-4z = 81.$

2) Es sei $\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r = 9$ und $\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Bestätige zunächst wieder, daß der Punkt B auf der Kugel liegt!

Da $\vec{x}_B - \vec{x}_M = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist, lautet die Gleichung der Tangentialebene:

$$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 81, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 81$$

$$\Leftrightarrow \quad 3(x-2)-6(y+1)+6(z-3) = 81 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y+2z = 37.$$

Bemerkung: Für den Vektor $\vec{x}_B - \vec{x}_M$ gilt: $\vec{x}_B - \vec{x}_M = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dieser Vektor ist ein Normalenvektor der Tangentialebene; bei einem solchen Normalenvektor kommt es aber auf die Länge nicht an. Wir können also – um mit „kleineren" Zahlen rechnen zu können – statt mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ auch mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ arbeiten. Dann müssen wir allerdings auch auf der rechten Seite der Gleichung durch 3 dividieren. $81 : 3 = 27$.
Dann erhalten wir als Gleichung der Tangentialebene:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 27 \Leftrightarrow (x-2) - 2(y+1) + 2(z-3) = 27$$
$$\Leftrightarrow x - 2 - 2y - 2 + 2z - 6 = 27$$
$$\Leftrightarrow x - 2y + 2z = 27 + 10 = 37,$$

also schließlich dieselbe Gleichung wie oben.

5. Eine **Tangentialebene** an eine Kugel ist dadurch gekennzeichnet, daß sie mit der Kugel genau einen Punkt gemeinsam hat. Für die Lage einer Ebene ε zu einer Kugel K gibt es zwei weitere Möglichkeiten:

1) die Ebene hat mit der Kugel mehr als einen Punkt gemeinsam; dann ist das Schnittgebilde ein Kreis;

2) die Ebene verläuft ganz außerhalb der Kugel.

Welcher Fall vorliegt, kann man dadurch entscheiden, daß man den Abstand d der Ebene vom Mittelpunkt der Kugel ermittelt.

Beispiel:

Gegeben sind die Kugel mit $M(-3|1|-1)$ und $r = 6$ und die drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 zu

$$x - 2y + 2z = 2; \quad x - 2y + 2z = 11 \quad \text{und} \quad x - 2y + 2z = 20.$$

Die drei Ebenen haben alle den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und sind daher parallel.

Mit Hilfe des in §9, IV (Seite 169) besprochenen Projektionsverfahren erhält man für die Abstände des Punktes M von den drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3:

$$d_1 = 3 < r; \quad d_2 = 6 = r \quad \text{und} \quad d_3 = 9 > r \quad \text{(Aufgabe 15a).}$$

Dies bedeutet: die Ebene ε_1 schneidet die Kugel in einem Kreis; die Ebene ε_2 ist eine Tangentialebene an die Kugel und die Ebene ε_3 verläuft ganz außerhalb der Kugel.
Den Berührpunkt $B(x_B, y_B, z_B)$ zwischen der Kugel und der Ebene ε_2 kann man nach dem folgenden Verfahren bestimmen.

Allgemein lautet die Gleichung der Tangentialebene an die gegebene Kugel im Punkt B nach Satz S 12.3:

$$(x_B+3)(x+3)+(y_B-1)(y-1)+(z_B+1)(z+1)=36.$$

Dies muß die Gleichung der Ebene ε_2, also die Gleichung

$$x-2y+2z=11$$

sein. Durch Vergleich der beiden Gleichungen muß es möglich sein, die Koordinaten von B zu bestimmen. Dazu formen wir die Ebenengleichung folgendermaßen um:

$$x+3-2(y-1)+2(z+1)=11+3+2+2=18.$$

Um nun noch auf der rechten Seite die Zahl 36 zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung mit 2:

$$2(x+3)-4(y-1)+4(z+1)=36.$$

Der Vergleich ergibt nun, daß $x_B+3=2 \quad \wedge \quad y_B-1=-4 \quad \wedge \quad z_B+1=4$,
also $x_B=-1 \quad \wedge \quad y_B=-3 \quad \wedge \quad z_B=3$

sein muß. Der gesuchte Berührpunkt ist also $B(-1|-3|3)$.

Bemerkung: Man kann den Punkt B auch mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene bestimmen; es gilt:

$$\vec{x}_B=\vec{x}_M+d_2\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}.$$

Für den Mittelpunkt M_1 des Schnittkreises zwischen der Kugel und der Ebene ε_1 erhält man nach der gleichen Formel:

$$\vec{x}_{M_1}=\vec{x}_M+d_1\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}+3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Für den Radius ρ des Schnittkreises gilt nach Bild 12.15:

$$\rho=\sqrt{r^2-d_1^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

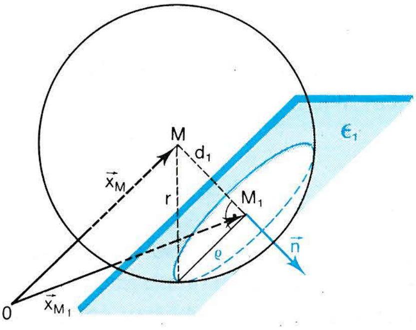


Bild 12.15

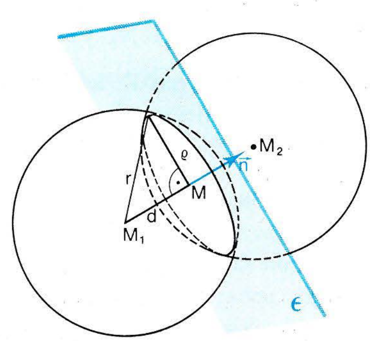


Bild 12.16

6. Auf das im vorstehenden behandelte Problem des Schnitts einer Kugel mit einer Ebene kann man das Problem des **Schnitts zweier Kugeln** zurückführen, die sich gegenseitig durchsetzen.

Beispiel:

$$K_1:\ x^2+y^2+z^2=64; \qquad K_2:\ (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=49$$

Wir formen die Gleichung für K_2 um:

$$x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2+4z+4=49 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y+z^2+4z=40.$$

Wenn man von dieser Gleichung die Gleichung für K_1 subtrahiert, erhält man:

$$-4x-2y+4z=40-64=-24 \Leftrightarrow 2x+y-2z=12.$$

Dieser Ebenengleichung müssen die Koordinaten aller Punkte genügen, die auf beiden Kugeln liegen. In dieser Ebene muß also auch der Schnittkreis der beiden Kugeln liegen (Bild 12.16). Die Hesseform der Ebenengleichung lautet:

$$\tfrac{2}{3}x+\tfrac{1}{3}y-\tfrac{2}{3}z=4;$$

die Ebene hat also vom Nullpunkt, dem Mittelpunkt der Kugel K_1, den Abstand $d=4$. Mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n}$ dieser Ebene kann man den Mittelpunkt des Schnittkreises ermitteln. Es gilt:

$$\vec{x}_M=d\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{4}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{(Bild 12.16, Seite 231).}$$

Der Radius des Schnittkreises ist gegeben durch:

$$\rho=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{64-16}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

Bemerkung: Auf die entsprechende Weise kann man auch die **Schnittpunkte zweier Kreise** bestimmen, die sich gegenseitig durchsetzen (Aufgaben 21 – 24).

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle die Gleichung der Tangente t an den Kreis K zum Berührpunkt B! Berechne die fehlende Koordinate von B!

a) K: $\vec{x}^2=36$; $B(\sqrt{11}|y)$, $y>0$ **b)** K: $M(-5|2)$, $r=13$; $B(7|y)$, $y<0$

2. Gegeben ist ein Kreis K, ferner ein Richtungsvektor $\vec{a}$ von Tangenten an diesen Kreis. Wie lauten die Gleichungen der (beiden) Tangenten? Wie liegen jeweils die Berührpunkte eines Tangentenpaares zum Kreismittelpunkt?

a) K: $\vec{x}^2=58$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\10\end{pmatrix}$ **b)** K: $\vec{x}^2=144$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$ **c)** K: $\vec{x}^2=25$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-8\end{pmatrix}$

3. Ermittle die Gleichung der Tangentialebene τ an die Kugel K zum Berührpunkt B!

a) K: $\vec{x}^2=169$; $B(-12|y|4)$, $y>0$ **b)** $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}\right]^2=289$; $B(x|-4|14)$, $x<0$

4. Gegeben sind der Mittelpunkt M eines Kreises (einer Kugel) K und ein Berührpunkt B. Ermittle die Gleichung der zugehörigen Tangente t bzw. der zugehörigen Tangentialebene τ!

a) $M(2|4)$, $B(-10|9)$ **b)** $M(-1|12)$; $B(-7|4)$

c) $M(1|-3|-2)$; $B(3|-9|-5)$ **d)** $M(9|-3|4)$; $B(1|5|8)$

e) $M(3|8|1)$; $B(2|4|-7)$ **f)** $M(2|-1|-1)$; $B(-1|1|-7)$

5. Gegeben sind eine Ebene τ und ein Punkt M. Ermittle die Gleichung derjenigen Kugel $K(M;r)$, die τ zur Tangentialebene hat!

a) τ: $-2x+y+2z=10$; $M(1|5|1)$ **b)** τ: $2x-4y+4z=40$; $M(10|2|-2)$

6. a) Bestimme die Schnittpunkte der Kugel K zu $\vec{x}^2=9$ mit der Geraden zu

$\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$!

b) Ermittle die Gleichungen der Tangentialebene τ_1 und τ_2 in diesen Schnittpunkten an die Kugel K!

c) Ermittle die Gleichung der Schnittgeraden von τ_1 und τ_2 und die Größe des Schnittwinkels!

7. a) Zeige, daß die Gerade zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}11\\0\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}$ Tangente an die Kugel zu $\vec{x}^2=21$ ist!

b) Ermittle Gleichungen der Tangentialebene τ im Berührpunkt der Tangente an die Kugel in Normalen- und in Parameterform!

8. Bestimme diejenigen vier Punkte des Kreises K, die von der x-Achse den Abstand d haben! Ermittle die Gleichungen der Tangenten in diesen vier Punkten und bestimme die Schnittpunkte von je zwei der Tangenten! Zeichne den Kreis und die Tangenten!

a) K: $\vec{x}^2=8$; $d=2$ **b)** K: $\vec{x}^2=225$; $d=9$ **c)** K: $\vec{x}^2=5$; $d=1$

9. Zeige, daß eine Gerade zu $\vec{n}\cdot\vec{x}=p$ genau dann Tangente an den Kreis zu $\vec{x}^2=r^2$ ist, wenn $r^2\vec{n}^2=p^2$ gilt!

Bestätige den Sachverhalt an folgenden Beispielen!

a) $\vec{x}^2=16$; $3x-4y=20$ **b)** $\vec{x}^2=18$; $x+y=6$

c) $\vec{x}^2=20$; $2x+y=10$ **d)** $\vec{x}^2=48$; $5x-6y=50$

10. Durch den Punkt A verlaufen zwei Tangenten an den Kreis K. Ermittle ihre Gleichungen und berechne die Größe ihres Schnittwinkels! Zeichne die Figur!

a) $A(0|-6)$; K: $\vec{x}^2=18$ **b)** $A(8|3)$; K: $M(3|-2)$, $r=5$

c) $A(8|2)$; K: $\vec{x}^2=34$ **d)** $A(-5|5)$; K: $M(0|0)$, $r=\sqrt{10}$

Anleitung: 1) Lege durch A ein Geradenbüschel mit variablem Richtungsvektor $\vec{a}$, bringe die Geraden zum Schnitt mit dem Kreis und bestimme den Richtungsvektor $\vec{a}$ so, daß der Kreis berührt wird **(Diskriminantenmethode)!**

2) Die gesuchten Tangenten an den Kreis sind genau diejenigen Geraden, die durch A verlaufen und vom Kreismittelpunkt M den Abstand r haben. Verwende die Hessesche Normalengleichung, um die Tangentengleichungen zu ermitteln **(Abstandsmethode)!**

11. **a)** Ermittle die Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel zu $\vec{x}^2=36$ in den Berührpunkten $B(4|y|4)$;
b) Ermittle die Schnittgerade der beiden Tangentialebenen!

12. Zeige, daß die beiden Kugeln $x^2+y^2+z^2=81$ und zu $x^2+y^2+z^2+6x-4y-12z=-45$ sich berühren! Ermittle die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene!

13. **a)** Ermittle die beiden Schnittpunkte zwischen der Geraden g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ und der Kugel zu $\vec{x}^2=9$!
b) Berechne die Länge der Sehne, die die Kugel K aus der Geraden g ausschneidet!
c) Ermittle die Gleichungen der beiden Tangentialebenen τ_1 und τ_2 an die Kugel K in den Schnittpunkten von K und g!
d) Bestimme das Schnittgebilde der beiden Ebenen τ_1 und τ_2! Zeige, daß die Schnittgerade und die gegebene Gerade g zueinander orthogonal sind!
e) Berechne die Größe des Schnittwinkels der beiden Tangentialebenen!

14. Löse Aufgabe 13 für folgende Gerade g und folgende Kugel K!

a) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}$; K: $\vec{x}^2=36$

b) g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}$; K: $M(1|3|2)$, $r=3$

15. Gegeben sind die Kugel K mit $M(-3|1|-1)$ mit $r=6$ und die drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 zu:

ε_1: $x-2y+2z=2$; ε_2: $x-2y+2z=11$; ε_3: $x-2y+2z=20$ (Vergleiche Seite 230!)

a) Berechne den Abstand des Kugelmittelpunktes M von den drei Ebenen nach dem Projektionsverfahren oder mit Hilfe der Hesseform für die Ebenengleichungen!
b) Ermittle die Schnittpunkte der Ebenen ε_1 und ε_2 mit den Geraden zu $\vec{x}=\vec{x}_M+t\vec{n}$, wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebenen ist! Um welche Punkte handelt es sich?

16. Gegeben ist die Kugel zu $\vec{x}^2=49$. Ermittle die Gleichungen der Tangentialebenen an K, welche die beiden Spannvektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$ haben!
Bestimme ferner die Berührungspunkte B_1 und B_2 und ihre Entfernung!

17. **a)** Zeige, daß die Gerade g Tangente an die Kugel K ist! Bestimme den Berührpunkt!

g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\7\\7\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$; K: $M(1|-1|6)$, $r^2=29$

b) Ermittle die Gleichung der Tangentialebene, in der g liegt!

18. Ermittle das Schnittgebilde zwischen der Kugel zu $\vec{x}^2=100$ und den folgenden Ebenen!
a) $z=5$ **b)** $x=5\cdot\sqrt{3}$ **c)** $y=-9$ **d)** $x+y=4$ **e)** $y-z=7$ **f)** $-6x+8z=100$

19. Eine Ebene ε und eine Gerade g sind gegeben durch

$$\varepsilon: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}; \quad g: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

a) Ermittle die Gleichung der Kugel K um den Nullpunkt, die ε zur Tangentialebene hat! Berechne den Berührpunkt!

b) Berechne die Schnittpunkte zwischen der Geraden g und der Kugel K!

c) Bestimme Gleichungen der Tangentialebenen an die Kugel K in den Schnittpunkten von g und K!

d) Bestimme das Schnittgebilde dieser beiden Tangentialebenen!

20. Untersuche, ob sich die Kugel K und die Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 schneiden! Bestimme ggf. das Schnittgebilde!

a) K: $M(-4|5|-2)$, $r=6$
ε_1: $2x-2y-z=-7$
ε_2: $2x-2y-z=2$
ε_3: $2x-2y-z=11$

b) K: $M(1|4|-1)$, $r=7$
ε_1: $2x-6y+3z=-25$
ε_2: $2x-6y+3z=24$
ε_3: $2x-6y+3z=73$

c) K: $M(6|2|-3)$, $r=7$
ε_1, ε_2 und ε_3 seien die Koordinatenebenen

21. Wie liegen die Kreise K_1 und K_2 zueinander? Ermittle ggf. Schnittpunkte oder den kleinsten Abstand von K_1 und K_2!

a) K_1: $\vec{x}^2=10$
K_2: $M_2(5|-5)$, $r^2=20$

b) K_1: $\vec{x}^2=4$
K_2: $M_2(-4|3)$, $r=1$

c) K_1: $\vec{x}^2=25$
K_2: $M_2(-4|-3)$, $r=10$

22. Unter dem „Schnittwinkel zweier Kreise" versteht man den kleineren Winkel, den die beiden Kreistangenten in einem Schnittpunkt bilden. Berechne die Größe des Schnittwinkels für

K_1: $M_1(2|-4)$; $r^2=17$ und K_2: $M_2(-1|-1)$; $r^2=17$!

23. Bestimme den Radius r_1 eines Kreises K_1, der den Kreis K_2 rechtwinklig schneidet!

a) $M_1(5|-12)$; K_2: $\vec{x}^2=144$ **b)** $M_1(9|3)$; K_2: $x^2+(y-5)^2=36$

Anleitung: Verwende, daß ein Schnittpunkt $S(x|y)$ der Kreise auf K_2 liegt und daß $\overrightarrow{M_1S}\perp\overrightarrow{M_2S}$ ist!

24. a) Welcher Kreis K_1 geht durch $P_1(1|3)$ und $P_2(1|-3)$ und berührt den Kreis K_2 mit $M_2(5|-3)$ und $r_2=2$?

b) Welcher Kreis K_1 geht durch die Schnittpunkte der beiden Kreise K_2 zu $\vec{x}^2-\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=8$ und K_3 zu $\vec{x}^2-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=20$ und hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden g zu $\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=7$?

c) Welcher Kreis berührt beide Koordinatenachsen und geht durch den Punkt P?

1) $P(4|2)$ **2)** $P(-6|3)$ **3)** $P(5|-10)$ **4)** $P(x|4)$

Achte jeweils darauf, ob die Lösung eindeutig ist!

25. Untersuche, ob sich die beiden Kugeln K_1 und K_2 schneiden!

a) K_1: $\vec{x}^2=16$
K_2: $M_2(-1|2|-2)$, $r_2=1$

b) K_1: $M_1(-3|4|2)$, $r_1=\sqrt{15}$
K_2: $M_2(-6|6|8)$, $r_2=\sqrt{15}$

c) K_1: $M_1(8|0|11)$, $r_1=9$
K_2: $M_2(6|-5|3)$, $r_2=5$

d) K_1: $M_1(3|-1|-2)$; $r_1=9$
K_2: $M_2(7|-8|2)$; $r_2=12$

26. Bestimme den Radius r_1 einer Kugel K_1 so, daß sie die Kugel K_2 berührt! Wie lautet die Gleichung der beiden Kugeln gemeinsamen Tangentialebene?
Anleitung: Benutze die Gerade g durch M_1 und M_2!

a) K_1: $M_1(0|0|0)$; K_2: $M_2(3|-2|-6)$, $r_2=14$

b) K_1: $M_1(8|2|5)$; K_2: $M_2(2|-1|3)$, $r_2=7$

27. Ermittle von dem Schnittkreis der Kugeln K_1 und K_2 eine Gleichung der Ebene, in der er liegt, und ferner Mittelpunkt und Radius!

a) K_1: $\vec{x}^2=25$
K_2: $M_2(8|0|0)$, $r_2=5$

b) K_1: $\vec{x}^2=25$
K_2: $M_2(2|-1|2)$, $r_2=\sqrt{24}$

c) K_1: $M_1(1|3|2)$, $r_1=7$
K_2: $M_2(4|-1|2)$, $r_2=\sqrt{54}$

IV. Pol und Polare. Pol und Polarebene

1. Bei den Beispielen des letzten Abschnitts haben wir jeweils durch Einsetzen in die Kreis- bzw. in die Kugelgleichung bestätigt, daß der gegebene Punkt B tatsächlich auf dem Kreis bzw. auf der Kugel liegt. Wir stellen uns die Frage: welche geometrische Bedeutung haben die Gleichungen

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_1=r^2 \quad \text{bzw.} \quad (\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_M)=r^2,$$

wenn der gegebene Punkt P_1 zum Ortsvektor x_1 **nicht** auf dem Kreis bzw. **nicht** auf der Kugel liegt?

Beispiel:

Gegeben: Kreis mit $M(0|0)$, $r=5$ und der Punkt $P_1(7|1)$.

Der Punkt P_1 liegt außerhalb des Kreises (Bild 12.17). Die Gleichung $\vec{x}\cdot\vec{x}_1=r^2$ lautet in diesem Fall:

$$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}=25, \quad \text{also}$$

$$7x+y=25 \;\Leftrightarrow\; y=-7x+25.$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden g, die den Kreis – wie Bild 12.17 zeigt – in zwei Punkten B_1 und B_2 schneidet.

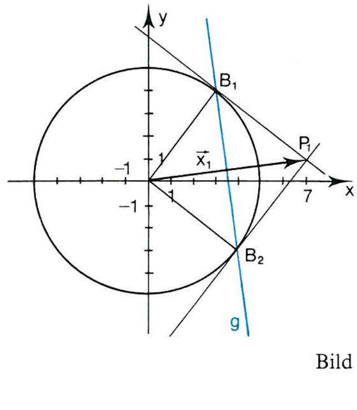


Bild 12.17

Wir ermitteln die Koordinaten dieser Punkte durch Einsetzen in die Kreisgleichung:

$$\begin{aligned} & x^2+(-7x+25)^2=25 && \Leftrightarrow\ x^2+49x^2-350x+625=25 \\ \Leftrightarrow\ & 50x^2-350x+600=0 && \Leftrightarrow\ x^2-7x+12=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-3)\cdot(x-4)=0 && \Leftrightarrow\ x=3 \vee x=4. \end{aligned}$$

Zu $x_1=3$ gehört $y_1=-3\cdot 7+25=4$; zu $x_2=4$ gehört $y_2=-4\cdot 7+25=-3$; die Schnittpunkte zwischen Kreis und Gerade sind also: $B_1(3|4)$ und $B_2(4|-3)$.

2. Da der gegebene Punkt P_1 außerhalb des Kreises liegt, kann die Gerade g keine Tangente an den Kreis sein. Dennoch hat auch diese Gerade etwas mit Tangenten an den Kreis zu tun. Wie Bild 12.17 zeigt, kann man vermuten, daß die beiden Punkte B_1 und B_2 die Berührpunkte der beiden Tangenten an den Kreis sind, die durch den Punkt P_1 gehen. Diese Vermutung wollen wir im folgenden beweisen.

3. Es sei $P_1(x_1|y_1)$ ein Punkt außerhalb des Kreises zu $\vec{x}^2=r^2$. Durch diesen Punkt gibt es zwei Tangenten an den Kreis, und zwar mit den Berührpunkten B_1 und B_2 (Bild 12.18). Die Gleichungen dieser Tangenten sind nach Satz S 12.3:

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_{B_1}=r^2 \quad\text{und}\quad \vec{x}\cdot\vec{x}_{B_2}=r^2.$$

Da der Punkt P_1 auf beiden Tangenten liegt, müssen für seinen Ortsvektor $\vec{x}_1$ beide Gleichungen erfüllt sein:

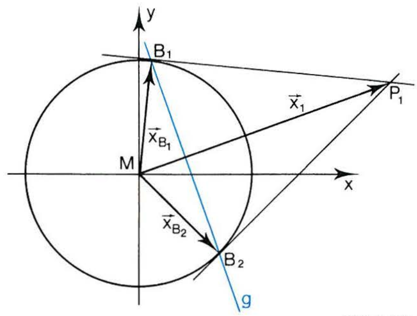


Bild 12.18

$$\vec{x}_1\cdot\vec{x}_{B_1}=r^2 \quad\text{und}\quad \vec{x}_1\cdot\vec{x}_{B_2}=r^2.$$

Wir können diese Gleichungen nun auch anders deuten; sie besagen nämlich auch, daß die beiden Punkte B_1 und B_2 auf der Geraden zu

$$\vec{x}_1\cdot\vec{x}=r^2$$

liegen. Man nennt diese Gerade die **„Polare des Pols P_1 bezüglich des Kreises K“.**

Beachte, daß die Gleichung dieselbe Form hat wie die Tangentengleichung $\vec{x}_B\cdot\vec{x}=r^2$!

4. Es ist leicht möglich, die vorstehenden Überlegungen auf einen Kreis zu übertragen, dessen Mittelpunkt M nicht der Nullpunkt ist (Aufgabe 10). Wir definieren:

D 12.1 Gegeben seien ein Punkt P_1 durch seinen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und ein Kreis K durch eine Gleichung der Form:

$$\vec{x}^2=r^2. \quad\Big|\quad (\vec{x}-\vec{x}_M)^2=r^2.$$

Dann heißt die Gerade g zu

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_1=r^2 \quad\Big|\quad (\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_M)=r^2$$

die „Polare des Pols P_1 bezüglich des Kreises K“.

Wie wir gezeigt haben, gilt für einen Pol P_1, der außerhalb des Kreises liegt, der Satz

S 12.5 **Liegt ein Pol P_1 außerhalb des Kreises K, so schneidet die zugehörige Polare g den Kreis in den Berührpunkten B_1 und B_2 der beiden Tangenten, die von P_1 aus an den Kreis gelegt werden können.**

5. Entfernt sich der Pol P vom Kreis, so ist nach Bild 12.19 anschaulich klar, daß der Abstand der Polaren vom Kreismittelpunkt M kleiner wird. Nähert sich umgekehrt der Pol dem Kreis, so vergrößert sich der Abstand der Polare vom Kreismittelpunkt M. Diesen Sachverhalt wollen wir beweisen. Dazu bringen wir die Polarengleichung

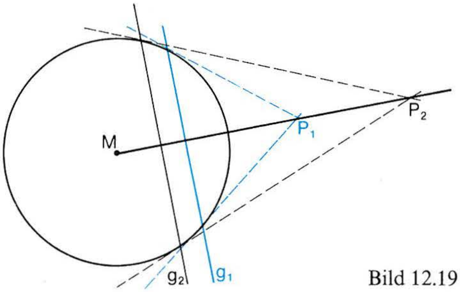


Bild 12.19

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x} = r^2$$

auf die Hesseform $\dfrac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} \cdot \vec{x} - \dfrac{r^2}{|\vec{x}_1|} = 0.$

Die Gleichung besagt, daß die Polare des Punktes P_1 vom Nullpunkt und somit vom Kreismittelpunkt den Abstand $d = \dfrac{r^2}{|\vec{x}_1|}$ hat.

Aus dieser Beziehung erhält man Aufschluß über die Lage von Pol und Polare zum Kreis:

1) Ist $|\vec{x}_1| > r$, so gilt $d < r$: die Polare ist eine Sekante;

2) ist $|\vec{x}_1| = r$, so gilt $d = r$: die Polare ist eine Tangente;

3) ist $|\vec{x}_1| < r$, so gilt $d > r$: die Polare ist eine Passante.

Den Fall 3) haben wir bisher noch nicht erörtert; er besagt, daß zu einem Pol P_1 innerhalb des Kreises K die zugehörige Polare g außerhalb des Kreises verläuft.

Beispiel: Die Gleichung der Polaren zum Pol $P_1(1|1)$ bezüglich des Kreises zu $x^2 + y^2 = 4$ lautet: $x + y = 4$ (Bild 12.20).

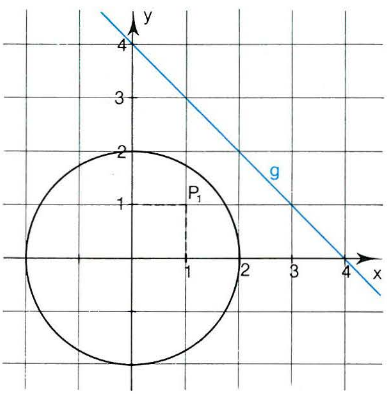


Bild 12.20

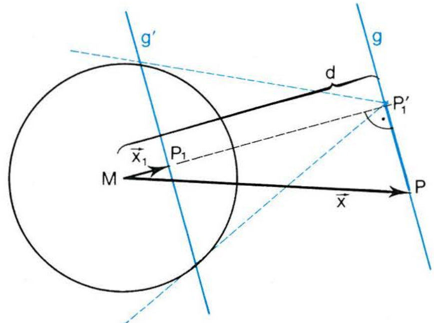


Bild 12.21

6. Ein weiterer Zusammenhang wird deutlich, wenn man durch den Pol P_1 die Parallele g' zur Polaren g des Punktes P_1 legt und dann den zu g' gehörenden Pol P_1' sucht (Bild 12.21). Dieser Zusammenhang soll in Aufgabe 6 untersucht werden.

7. Die vorstehenden Überlegungen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den dreidimensionalen Fall, also auf die **Kugel** übertragen. Wir definieren:

D 12.2 **Gegeben seien ein Punkt P_1 durch seinen Ortsvektor $\vec{x}_1$ und eine Kugel K durch eine Gleichung der Form**

$$\vec{x}^2 = r^2. \quad | \quad (\vec{x}-\vec{x}_M)^2 = r^2.$$

Dann heißt die Ebene ε zu

$$\vec{x}\cdot\vec{x}_1 = r^2 \quad | \quad (\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_M) = r^2$$

die „Polarebene des Pols P_1 bezüglich der Kugel K".

Analog zu Satz S 12.5 gilt in diesem Falle der Satz

S 12.6 **Liegt ein Pol P_1 außerhalb der Kugel K, so schneidet die zugehörige Polarebene ε die Kugel in den Berührpunkten aller Tangentialebenen, die von P_1 aus an die Kugel gelegt werden können.**

Der Beweis soll in Aufgabe 16 b geführt werden.

8. Aus der Hesseform der Gleichung für die Polarebene $\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}\cdot\vec{x} - \frac{r^2}{|\vec{x}_1|} = 0$ kann man – wie oben – für den Abstand $d = \frac{r^2}{|\vec{x}_1|}$ der Polarebene vom Kugelmittelpunkt folgende Fälle entnehmen:

1) Ist $|\vec{x}_1| > r$, so gilt $d < r$: die Polarebene durchdringt die Kugel;

2) ist $|\vec{x}_1| = r$, so gilt $d = r$: die Polarebene ist eine Tangentialebene an die Kugel;

3) ist $|\vec{x}_1| < r$, so gilt $d > r$: die Polarebene verläuft außerhalb der Kugel (Aufgaben 15 und 17).

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle die Gleichung der Polaren des Punktes P_1 bezüglich des Kreises K! Konstruiere die gesuchte Polare auch über die beiden Tangenten durch P_1 an K und vergleiche!
a) K: $\vec{x}^2 = 4$, $P_1(2|2)$ **b)** K: $\vec{x}^2 = 25$, $P_1(5|6)$ **c)** K: $\vec{x}^2 = 18$, $P_1(-5|5)$

2. Ermittle rechnerisch und zeichnerisch die Polare g des Punktes P bezüglich des Kreises K zu $\vec{x}^2 = 100$! Beachte jeweils die Lage von P zu K und von g zu K!
a) $P(10|10)$ **b)** $P(5|5)$ **c)** $P(5\sqrt{2}|5\sqrt{2})$ **d)** $P(4|3)$

3. Bestimme zum Kreis K und zur Polaren g den zugehörigen Pol P_1!
a) K: $\vec{x}^2 = 81$, g: $4x + 3y = 27$ **b)** K: $M(0|0)$, $r = 5$, g: $4x - 3y = 25$
c) K: $\vec{x}^2 = 29$, g: $x - 12y = 29$ **d)** K: $\vec{x}^2 = 18$, g: $-x + y = 10$

4. Wie kann aus einer gegebenen Polaren g bezüglich des Kreises K der zugehörige Pol P_1 konstruiert werden? Wähle die Polare **a)** als Sekante, **b)** als Tangente und **c)** als Passante von K! Führe die Konstruktionen für Beispiele in Aufgabe 3 durch!

5. Bild 12.21 zeigt außer dem Pol P_1 und der zugehörigen Polaren g bezüglich K die Gerade g', die parallel zu g durch P_1 verläuft, und auf g den Punkt P_1'.
a) Bestimme zum Kreis zu $\vec{x}^2=100$ und zum Punkt $P_1(-5|5)$ die Polare g, ermittle eine Gleichung von g' und den zu g' zugehörigen Pol P_1' bezüglich K. Weise nach, daß P_1' wie in Bild 12.21 Schnittpunkt von g und $g(O|P_1)$ ist!
b) Formuliere den in a) festgestellten Zusammenhang als allgemeingültige Aussage und beweise diese für den Fall, daß P_1 im Innern von K liegt (vgl. Bild 12.21)!
c) P_1 liege außerhalb K. Entwirf eine Konstruktionszeichnung für g, g' und den zugehörigen Pol P_1' und begründe sie!
d) P_1 liege nun auf dem Kreis K. Wie müssen die Überlegungen in b) und c) abgewandelt werden?

6. Löse Aufgabe 5a) für folgende Beispiele!
a) K: $\vec{x}^2=4$, $P_1(1|1)$ **b)** K: $\vec{x}^2=29$, $P_1(12|1)$ **c)** K: $\vec{x}^2=18$, $P_1(\frac{9}{5}|\frac{9}{5})$

7. Gegeben sind der Kreis K zu $\vec{x}^2=10$ und der Punkt $P(-5|5)$. Gesucht sind die Tangenten, die man von P an den Kreis K konstruieren kann. Ermittle die Gleichungen der Tangenten nach mehreren Verfahren!

Anleitung:
a) Polarenmethode: Bestimme zu P die Polare und deren Schnittpunkte mit dem Kreis K!
b) Diskriminantenmethode: Lege durch P ein Geradenbüschel, bringe die Gerade mit K zum Schnitt und ermittle den Richtungsvektor $\vec{a}$ so, daß K nur berührt wird!
c) Abstandsmethode: Die Tangenten sind diejenigen Geraden durch P, die von O den Abstand $r=\sqrt{10}$ haben!

8. Löse Aufgabe 7 für den Kreis K zu $\vec{x}^2=34$ und den Punkt $P(8|2)$!

9. Übertrage die Überlegungen im Lehrtext Seite 237 zur Bestimmung der Gleichung einer Polaren g zum Pol P_1 auf einen Kreis K, dessen Mittelpunkt M nicht mehr der Nullpunkt ist! Bestätige die in Definition D 12.1 angegebene Gleichung $(\vec{x}-\vec{x}_M)\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_M)=r^2$ für die Polare des Pols P_1!

10. Ermittle die Gleichung der Polaren des Punktes P_1 bezüglich des Kreises K! Bestimme die Polare auch zeichnerisch!
a) K: $M(3|-4)$, $r=3\sqrt{2}$; $P_1(2|-1)$ **b)** K: $M(-3|2)$, $r=5$; $P_1(1|5)$

11. Bestimme bezüglich des Kreises K zur Polaren g den Pol P!
a) K: $M(-3|-1)$, $r^2=44$; g: $x+3y=5$
b) K: $M(2|-3)$, $r=5$; g: $3x-4y=19$
c) K: $3x^2+3y^2-6x+8y-12=0$; g: $-3x+5y+30=0$

12. Bestimme die Gleichung der Tangenten an den Kreis K, die durch den Punkt P verlaufen, nach mehreren Verfahren!
a) $M(-2|4)$, $r^2=40$, $P(8|-6)$ **b)** $M(4|-3)$, $r^2=10$, $P(-1|-8)$
c) $M(-3|1)$, $r^2=34$, $P(5|3)$ **d)** $M(2|4)$, $r=13$, $P(-10|9)$

13. **a)** Übertrage den in Aufgabe 5 festgestellten Zusammenhang zwischen der Polaren g zum Punkt P_1, der Parallelen g' zu g durch P_1 und dem zu g' gehörigen Pol P_1' auf einen Kreis mit Mittelpunkt M, der nicht mehr der Nullpunkt ist!
b) Ermittle zum Kreis K mit $M(1|3)$ und $r=4$ und zum Punkt $P_1(-1|5)$ die Polare g, bestimme die Gleichung der Parallelen g' zu g durch P_1 und ermittle den zu g' gehörigen Pol P_1'! Wo liegt P_1'?

14. Ermittle die Gleichung der Polarebene des Punktes P_1 bezüglich der Kugel K!
a) K: $\vec{x}^2=4$, $P(0|-6|4)$ **b)** K: $\vec{x}^2=100$, $P_1(2|-3|4)$
c) K: $\vec{x}^2=12$, $P(-2|2|2)$ **d)** K: $M(3|-2|1)$, $r=2$, $P_1(2|-1|2)$
e) K: $M(-1|0|2)$, $r^2=10$, $P_1(4|-5|-8)$ **f)** K: $M(-1|4|1)$, $r=4$, $P_1(3|2|-1)$

15. Bestimme zur Kugel K und zur Polarebene ε den zugehörigen Pol P_1! Ermittle zum gefundenen Pol wieder die zugehörige Polarebene (Probe)!
a) K: $\vec{x}^2=144$, ε: $-x+3y+2z=6$ **b)** K: $\vec{x}^2=36$, ε: $4x+3y-2z+9=0$
c) K: $M(-1|5|4)$, $r=6$, ε: $2x-3y-2z=-7$
d) K: $x^2+y^2+z^2+4x-2y=5$, ε: $2x-y-z+3=0$

16. **a)** Zeige, daß der Punkt $P_1(16|12|-8)$ außerhalb der Kugel K zu $\vec{x}^2=36$ liegt und die zugehörige Polarebene ε die Kugel K schneidet. Bestätige, daß die Schnittpunkte zwischen K und ε die Berührpunkte aller durch P_1 führenden Tangenten an die Kugel sind!
b) Beweise Satz S 12.6! Orientiere dich dazu an Bild 12.22!
Anleitung: B sei der Berührpunkt einer durch P_1 führenden Tangentialebene τ an die Kugel K. Zu zeigen ist, daß der Ortsvektor $\vec{x}_B$ von B auch die Gleichung der Polarebene ε des Punktes P_1 bezüglich K erfüllt!

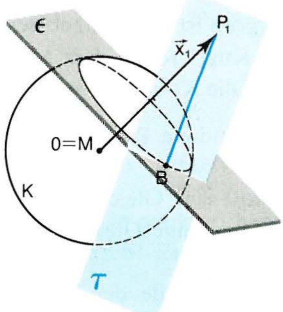


Bild 12.22

17. Gegeben ist die Ebene ε zu $-2x+y+2z-18=0$.
a) Bestimme den Abstand der Ebene ε vom Nullpunkt und den Lotfußpunkt!
b) Ermittle die Gleichung der Kugel K_1 um den Nullpunkt, die ε zur Tangentialebene hat! Welche Koordinaten hat der Berührpunkt B?
c) Bestimme den Pol P_1 von ε bezüglich der Kugel K_1 und deute das Ergebnis!
d) Ermittle die Pole von ε bezüglich der Kugel K_2 zu $\vec{x}^2=4$, K_3 zu $\vec{x}^2=9$ und K_4 zu $\vec{x}^2=54$!
e) Bestimme die Abstände der Pole P_2, P_3 und P_4 von der Ebene ε!

18. Zeige, daß im Dreieck PQR jeweils der Eckpunkt Pol der gegenüberliegenden Dreieckseite bezüglich des Kreises K ist! (PQR heißt ein „Polarendreieck" des Kreises).
a) $P(4|2)$, $Q(9|0)$, $R(4|10)$; K: $\vec{x}^2=36$ **b)** $P(6|4)$, $Q(\frac{6}{11}|\frac{24}{11})$, $R(-2|6)$; K: $\vec{x}^2=12$

19. Ergänze P(4|3), Q(0|4), R(x|y) zu einem Polarendreieck des Kreises zu $\vec{x}^2=16$! Vergleiche Aufgabe 18!

20. Ermittle den Pol P der Polarebene ε zu $x+y-z+72=0$ bezüglich der Kugel K zu $\vec{x}^2=144$! Lege durch P eine Ebene ε' parallel zu ε und bestimme ihren Pol P'! Wo liegt er?

V. Übergreifende Aufgaben

1. Eine Ebene ε sei gegeben durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-8\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$.

a) Ermittle die Normalengleichung der Ebene ε!

b) Bestimme in der Geradengleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-9\\k\end{pmatrix}$ den Wert für $k\in\mathbb{R}$ so, daß die zugehörige Gerade g_1 parallel zur Ebene ε verläuft!

c) Ermittle den Schnittpunkt S zwischen der Geraden g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\13\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ und der Ebene ε!

d) Wie groß ist der Winkel, den die Gerade g_2 mit der Ebene ε einschließt?

e) Eine Kugel K mit dem Mittelpunkt M(0|0|0) berührt die Ebene ε in einem Punkt B. Berechne die Koordinaten von B und den Radius von K!

2. Gegeben sind ein Punkt P(3|2|−5) und eine Gerade g durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\1\\-3\end{pmatrix}$.

a) Ermittle eine Gleichung der Ebene ε_1, in der der Punkt P und die Gerade g_1 liegen!

b) Bestimme eine Gleichung der Ebene ε_2, die den Punkt P enthält und senkrecht zur Geraden g ist!

c) Welche Gerade der Schar zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}k\\1\\-3\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}$ ist eine Tangente an die Kugel mit M(6|4|3) und $r=\sqrt{41}$?

Anleitung: Mache dir klar, daß höchstens eine Gerade der Schar Tangente an die Kugel sein kann!

d) Bestimme den Berührpunkt zwischen Tangente und Kugel!

e) Bestätige, daß der Richtungsvektor der Tangente auf dem Berührradius senkrecht steht!

3. Die Punkte A(1|1|0), B(0|1|1) und C(1|0|1) liegen auf der Kugel K zu $\vec{x}^2=2$.

a) Beschreibe die Lage der Strecken AB, BC und CA und berechne ihre Längen!

b) Ermittle zur Ebene ε durch A, B und C eine Normalengleichung! Welchen Abstand hat ε vom Nullpunkt?

c) Ermittle die Normalengleichung der Tangentialebenen an die Kugel K, die zur Ebene ε parallel sind!

d) Berechne Mittelpunkt M und Radius r des Kreises, in dem die Ebene ε die Kugel K schneidet!

e) Zeige, daß OABC ein regelmäßiges Tetraeder ist!

f) Wie groß ist der Winkel, den die Kante OA des Tetraeders mit der Ebene ε einschließt?

4. Gegeben sind die Kugel K zu $\vec{x}^2=26$ und die Gerade g zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Punkte P_1 und P_2, in denen die Gerade g die Kugel K schneidet!

b) Ermittle die Gleichung der beiden Tangentialebenen τ_1 und τ_2 in P_1 und P_2 an die Kugel K!

c) Untersuche die gegenseitige Lage von τ_1 und τ_2! Ermittle ggf. ihren Abstand oder die Gleichung der Schnittgeraden und die Größe ihres Schnittwinkels!

d) Gibt es eine Tangente t_1 in P_1 an die Kugel K mit dem Richtungsvektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\\b_3\end{pmatrix}$? Ermittle ggf. eine Gleichung für t_1! $(P_1(-3|-1|z_1))$

e) Berechne den Abstand des Punktes P_2 von t_1!

f) Gibt es eine Tangente t_2 in P_1 an die Kugel K mit dem Richtungsvektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$? (Begründung!).

g) Berechne die Spurpunkte der Tangente t_1 in den drei Koordinatenebenen!

5. Gegeben ist die Kugel K zu $\vec{x}^2=9$.

a) Für welche Koordinate $z>0$ liegt der Punkt $P(2|1|z)$ auf der Kugel K?

b) Ermittle die Gleichung der Tangentialebene τ in P an die Kugel K!

c) Durch P sind drei Tangenten t_1, t_2 und t_3 an die Kugel K zu legen mit den folgenden Richtungsvektoren:

$$t_1\colon\ \vec{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\a_3\end{pmatrix};\quad t_2\colon\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\b_2\\-2\end{pmatrix};\quad t_3\colon\ \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ermittle die Gleichungen dieser Tangenten!

d) Bestimme die Spurpunkte S_1, S_2 und S_3 der drei Tangenten in der x-y-Ebene!

e) Zeige, daß alle drei Spurpunkte auf einer Geraden g_1 liegen! Ermittle von g_1 eine Gleichung!

f) Bestimme die Gleichung der Spurgeraden g_2 der Tangentialebene τ in der x-y-Ebene! Vergleiche die Geraden g_1 und g_2!

g) Begründe das Ergebnis von f) geometrisch!

6. Gegeben sind die Punkte $P_1(1|2|2)$ und $P_2(-2|1|2)$ und die Kugel K zu $\vec{x}^2=9$.

a) Zeige, daß P_1 und P_2 auf der Kugel liegen!

b) Ermittle die Gleichungen der Tangentialebenen τ_1 und τ_2 an die Kugel K in P_1 und P_2, ferner die Gleichung der Schnittgeraden g der beiden Ebenen!

c) Bestimme den Abstand des Nullpunktes von g!

d) Ermittle Gleichungen derjenigen Tangenten t_1 und t_2, die die Kugel K in P_1 bzw. in P_2 berühren und die Richtungsvektoren $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ bzw. $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ haben! Welche spezielle Lage haben diese beiden Tangenten?

e) Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Tangenten t_1 und t_2! Bestimme ihren Abstand oder ihren Schnittpunkt und die Größe ihres Schnittwinkels!

f) Zeige, daß der Schnittpunkt der beiden Tangenten auf der Geraden g liegt!

7. Die Kugel K sei gegeben durch $\vec{x}^2=12$.
a) Zeige, daß die Punkte $P_1(2|2|2)$ und $P_2(-2|-2|2)$ auf der Kugel K liegen!
b) Ermittle Gleichungen der Tangentialebenen τ_1 und τ_2 an die Kugel K in den Punkten P_1 und P_2! Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden g_1 von τ_1 und τ_2!
c) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Tangentialebenen τ_1 und τ_2?
d) Ermittle Gleichungen der drei Tangenten t_1, t_2 und t_3, die die Kugel K in P_1 berühren und die folgenden Richtungsvektoren haben: $\vec{t}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a_3\end{pmatrix}$; $\vec{t}_2=\begin{pmatrix}0\\b_2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{t}_3=\begin{pmatrix}c_1\\0\\1\end{pmatrix}$!
e) Bestimme die Spurpunkte S_1, S_2 und S_3 der drei Tangenten mit der x-y-Ebene!
f) Zeige, daß alle drei Spurpunkte auf einer Geraden g_2 liegen! Ermittle eine Gleichung von g_2 und ihren Abstand vom Nullpunkt! Vergleiche g_1 und g_2!

8. Gegeben sind die Kugel K zu $\vec{x}^2=9$ und der Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ einer Ebenenschar.
a) Ermittle die Berührpunkte B_1 und B_2 von Tangentialebenen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$!
b) Bestimme Gleichungen von zwei Ebenen ε_1 und ε_2 dieser Schar, wobei ε_1 die Kugel in B_1 berührt und ε_2 ganz außerhalb der Kugel verläuft!
c) Eine weitere Ebene ε_3 der Schar habe den Abstand 1 vom Nullpunkt. Zeige, daß diese Ebene die Kugel K in einem Kreis schneidet! Bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r dieses Kreises!
d) Die Schnittpunkte der Kugel K mit der x-Achse, der y-Achse und der positiven z-Achse bestimmen eine regelmäßige Pyramide. Ermittle die fünf Eckpunkte dieser Pyramide!
e) Berechne das Volumen der Pyramide!

9. Eine Kugel K habe den Mittelpunkt $M(1|2|-2)$ und den Radius $r=3$. Eine Geradenschar $g(k, r)$ sei gegeben durch $\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\9\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}r\\2(k-r)\\-k\end{pmatrix}$ mit $k, r\in\mathbb{R}$.
a) Ermittle die Schnittpunkte von K mit den Koordinatenachsen!
b) Bestimme eine Gleichung derjenigen Tangentialebene τ_1 an die Kugel K, die durch den Nullpunkt geht! Welche Koordinaten hat der Berührpunkt B_1?
c) Ermittle die Gleichung einer weiteren Tangentialebene τ_2 an die Kugel, die zu τ_1 parallel ist! Welche Koordinaten hat der Berührpunkt B_2?
d) Zeige, daß alle Geraden $g(k, r)$ der Schar in derselben Ebene ε liegen! Ermittle eine Gleichung von ε!
e) Zeige, daß die Ebene ε ebenfalls eine Tangentialebene an die Kugel ist! Berechne den Berührpunkt B_3!
f) Bestimme die Geraden der Schar für $k=0$. Wie viele sind es? Wie liegen sie zur Kugel K?
g) Zeige, daß die Gerade aus f) Tangente an die Kugel K ist und ermittle den Berührungspunkt B_4!

10. Gegeben sind die Geradenschar g(k) zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1+2k\\-2\\-2k\end{pmatrix}$ mit $k\in\mathbb{R}$ und die Ebene ε_1 zu $2x+y+2z-18=0$.

a) Ermittle eine Gleichung derjenigen Kugel K, die die Ebene ε_1 berührt und den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat! Welche Koordinaten hat der Berührpunkt B?

b) Die Gerade g_2 zu $k=2$ bestimmt mit dem Nullpunkt eine Ebene ε_2. Ermittle eine Normalengleichung von ε_2 und das Schnittgebilde von ε_1 und ε_2!

c) Zeige, daß alle Geraden g(k) in der Ebene ε_1 liegen! Bestimme k so, daß die betreffende Gerade die Kugel K berührt!

d) S_1, S_2 und S_3 seien die Schnittpunkte von ε_1 mit den Koordinatenachsen. Sie bilden mit dem Nullpunkt ein Tetraeder. Berechne seine Volumenmaßzahl und benutze diese zur Ermittlung der Flächenmaßzahl des Dreiecks $S_1S_2S_3$!

11. Gegeben seien die Kugel K zu $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right]^2=49$ und die Geraden g_1 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und g_2 zu $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

a) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden g_2 mit der Kugel K!

b) Ermittle Gleichungen der Tangentialebene τ_1 und τ_2 an K in den Punkten S_1 und S_2! Berechne die Größe des Schnittwinkels der beiden Ebenen und den Abstand des Punktes S_2 von der Tangentialebene τ_1!

c) Zeige, daß die Gerade g_1 die Kugel K berührt, und ermittle die Koordinaten des Berührpunktes!

d) Beweise, daß alle Punkte, von denen aus zwei feste Punkte A und B unter einem rechten Winkel erscheinen, auf einer Kugel liegen. Bestimme eine Gleichung dieser Kugel für $A=S_1$ und $B=S_2$!

12. Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 und eine Geradenschar g(k):

$$g_1\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix};\quad g_2\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix};\quad g(k)\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}k\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{mit } k\in\mathbb{R}.$$

a) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g_1 und g_2 und bestimme ihren Abstand oder ihren Schnittpunkt und die Größe ihres Schnittwinkels!

b) Bestimme eine Normalengleichung der von g_1 und g_2 aufgespannten Ebene ε_1!

c) Bestimme eine Normalengleichung der Ebene ε_2, die g_1 enthält und zu ε_1 senkrecht verläuft!

d) Wie groß muß der Radius R einer Kugel um den Punkt $M(-2|0|6)$ gewählt werden, damit ε_1 eine Tangentialebene an die Kugel ist? Bestimme den Berührpunkt B!

e) Zeige, daß keine Gerade der Schar g(k) Tangente an die Kugel sein kann!

f) Zeige, daß alle Geraden der Schar g(k) in derselben Ebene ε_3 liegen! Ermittle eine Gleichung von ε_3! Welche besondere Lage hat ε_3?

13. Der Inkreis eines Dreiecks ABC sei durch $M_1(5|15)$ und $r_1=5$, ein Ankreis durch $M_2(0|0)$ und $r_2=10$ bestimmt. Bestimme die Punkte A, B und C!

Anleitung: Beachte, daß sich zwei gemeinsame Tangenten an die beiden Kreise unmittelbar bestimmen lassen!

14. Gegeben sind eine Gerade g, eine Ebene ε und eine Geradenschar g(k) mit $k \in \mathbb{R}$:

$$g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\13\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix};\quad \varepsilon\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-8\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix};\quad g(k)\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\6\\4\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}0\\-9\\k\end{pmatrix}.$$

a) Ermittle die Normalengleichung der Ebene ε!

b) Untersuche die gegenseitige Lage zwischen der Ebene ε und der Geraden g; bestimme den Abstand oder den Schnittpunkt S und die Größe des Schnittwinkels!

c) Bestimme den Wert für k so, daß die betreffende Gerade der Schar parallel zu ε ist! Welche Lage hat die Gerade dann?

d) Eine Kugel K mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt hat die Ebene ε als Tangentialebene? Bestimme den Berührpunkt und den Radius der Kugel!

15. Gegeben sind eine Ebene ε_1 und eine Geradenschar g(k) durch:

$$\varepsilon_1\colon 2x+y+2z=15;\quad g(k)\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2k+1\\-2\\-2k\end{pmatrix} \text{ mit } k\in\mathbb{R}.$$

a) Die Ebene ε_1 ist Tangentialebene an eine Kugel K um $M(-2|-1|1)$. Ermittle den Berührpunkt B und den Radius R der Kugel!

b) Die Gerade der Schar zu $k=2$ bestimmt mit dem Punkt M eine Ebene ε_2. Ermittle eine Normalengleichung von ε_2!

c) Untersuche die gegenseitige Lage von ε_1 und ε_2; bestimme den Abstand oder die Schnittgerade und die Größe des Schnittwinkels!

d) Zeige, daß alle Geraden g(k) der Schar in derselben Ebene ε_3 liegen! Mit welcher Ebene ist ε_3 identisch?

e) Zeige, daß wenigstens eine Gerade g(k) der Schar Tangente an die Kugel K ist! Ermittle die Gleichung(en) dieser Tangente(n)!

16. Gegeben sind die Kugel K zu $\vec{x}^2=36$ und drei Ebenenscharen durch:

$\varepsilon_1(a)\colon 2x+2y+az=18;\quad \varepsilon_2(b)\colon -x+2y+bz=18;\quad \varepsilon_3(c)\colon x-2y+cz=18.$

a) Für welche positiven Zahlen a, b, c sind die Ebenen Tangentialebenen der Kugel? Ermittle die zugehörigen Berührpunkte!

b) In welchem Punkt S schneiden sich die drei Tangentialebenen?

c) Ermittle die Größe der Schnittwinkel von je zwei Tangentialebenen!

d) Bestimme die Schnittgeraden von je zwei Tangentialebenen! Welche von ihnen hat eine besondere Lage?

e) Berechne die Größe der Schnittwinkel zwischen je zwei Schnittgeraden!

f) Der Punkt S bildet mit den Punkten $P(0|0|0)$, $Q(9|0|0)$ und $R(0|9|0)$ eine dreiseitige Pyramide. Berechne deren Volumenmaßzahl!

17. Gegeben seien eine Ebene ε, eine Kugelschar $K(\alpha)$ und eine Geradenschar g(k):

$$\varepsilon\colon 2x+y-2z=3;\quad K(\alpha)\colon \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\alpha\\\alpha+3\\-2\alpha\end{pmatrix}\right]^2=9\alpha^2 \text{ mit } \alpha\in\mathbb{R};\quad g(k)\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}k\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ mit } k\in\mathbb{R}.$$

a) Für welche Zahl α geht eine Kugel der Schar $K(\alpha)$ durch den Nullpunkt?

b) Berechne die Zahl α, für die eine Kugel der Schar $K(\alpha)$ die x-z-Ebene berührt! In welchem Punkt B berührt die Kugel die x-z-Ebene?

c) Zeige, daß alle Kugeln der Schar $K(\alpha)$ die Ebene ε in demselben Punkt A berühren! Welche Koordinaten hat A? Bestimme die Gleichung der Geraden, auf der alle Mittelpunkte der Kugeln der Schar $K(\alpha)$ liegen!
d) Für welche Werte von k sind Geraden der Parallelenschar $g(k)$ Tangenten an die Kugel $K(1)$? Bestimme die Berührpunkte und die zugehörigen Tangentialebenen!

18. Gegeben seien eine Ebenenschar $\varepsilon(k)$ durch $kx+3y=3$, die Kugel K_1 um $M(7|2|1)$ mit $r_1=5$ und die Punkte $P(5|3|-6)$; $Q(5|7|-9)$.
a) Zeige, daß alle Ebenen $\varepsilon(k)$ eine Gerade g_1 gemeinsam haben! Ermittle eine Parametergleichung von g_1!
b) Bestimme k so, daß die betreffende Ebene Tangentialebene an die Kugel K_1 ist! Ermittle den Berührpunkt B_1!
c) Eine zur Kugel K_1 konzentrische Kugel K_2 hat die Gerade g_2 durch P und Q als Tangente. Berechne den Radius von K_2 und den Berührpunkt B_2!
d) Berechne den Abstand des Punktes B_2 von der Geraden g_1!

19. Gegeben sind eine Ebene ε durch $x+y+z=4$ und eine Kugel K durch $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}\right]^2=36$, die Punkte $P_1(1|-1|3)$ und $P_2(2|-1|3)$.
a) Zeige, daß P_1 auf der Kugel K und P_2 in der Ebene ε liegt!
b) Die Gerade g führt durch P_1 und P_2. Berechne die Länge der Sehne, die von der Kugel K aus der Geraden g ausgeschnitten wird!
c) Zeige, daß die Ebene ε die Kugel K schneidet! Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes M^* und den Radius r^* des Schnittkreises K^*!
d) Ermittle eine Gleichung der Tangentialebene τ_1, die die Kugel K in P_1 berührt!
e) Die zu τ_1 parallelen Ebenen, die die Kugel K schneiden, bilden eine Ebenenschar $\varepsilon(k)$. Ermittle die zulässigen Werte von $k\in\mathbb{R}$ und bestimme eine Gleichung der Schar!
f) Ermittle diejenigen Ebenen der Schar $\varepsilon(k)$, die aus der Kugel Kreise mit den Radien $r_1=2\sqrt{5}$ und $r_2=3\sqrt{3}$ ausschneiden!
g) Ermittle eine Gleichung derjenigen Kugel, die durch Spiegelung der Kugel K an der Ebene ε entsteht!

20. Gegeben sind eine Kugelschar $K(\alpha)$ und zwei Geraden g_1 und g_2:

$$K(\alpha):\ \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-\alpha\\2\alpha\\0\end{pmatrix}\right]^2=\alpha^2 \text{ mit } \alpha>0;\qquad g_1:\ \vec{x}=t\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix};\qquad g_2:\ \vec{x}=v\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

a) Zeige, daß die Mittelpunkte $M(\alpha)$ der Kugeln $K(\alpha)$ auf einer Geraden g in der x-y-Ebene liegen!
b) Zeige, daß die Geraden g_1 und g_2 Tangenten an jede Kugel $K(\alpha)$ sind! Ermittle die Berührpunkte B_1 und B_2!
c) Zeichne in der x-y-Ebene die Schnittkreise der Kugeln $K(1)$, $K(2)$ und $K(3)$ mit den Geraden g_1, g_2 und den zugehörigen Berührpunkten!
d) $K(\alpha_1)$ und $K(\alpha_2)$ seien zwei sich schneidende Kugeln. Ermittle eine Gleichung ihres Schnittkreises!
e) Zeige, daß verschiedene Schnittkreise in zueinander parallelen Ebenen liegen!
f) Für alle gemeinsamen Punkte S zweier Kugeln $K(\alpha_1)$ und $K(\alpha_2)$ sei das jeweilige Dreieck mit den Punkten $M(\alpha_1)$, S und $M(\alpha_2)$ rechtwinklig. Welche Beziehung besteht zwischen α_1 und α_2?

§ 13 Lineare Gleichungssysteme (III)

I. Der Begriff des Rangs einer Matrix

1. In §7, I haben wir auf Seite 112 u.a. das folgende Gleichungssystem betrachtet:

$$\begin{cases} x+\ \ y+z=\ \ 0 \\ \quad\ \ 2y+z=\ \ 1. \\ 3x-\ \ y+z=-2 \end{cases}$$

Die Umformung der erweiterten Matrix B ergab:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot(-3) \\ \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \downarrow\cdot 1 \end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Für die Art der Lösungsmenge des Gleichungssystems ist die Tatsache kennzeichnend, daß sich bei diesen Umformungen eine vollständige Nullzeile ergibt. Um diesen Sachverhalt genauer zu ergründen, fassen wir die Zahlen jeder der drei Gleichungen als Koordinaten eines Vektors auf. Da diese Zahlen jeweils in einer Zeile der Matrix B stehen, schreiben wir diese Vektoren statt in Spaltenform in **Zeilenform:**

$$\vec{g}_1=(1;1;1;0);\quad \vec{g}_2=(0;2;1;1);\quad \vec{g}_3=(3;-1;1;-2).$$

Bei der Durchführung des Gaußverfahrens haben wir zunächst den Vektor

$$\vec{g}_3{}'=-3\vec{g}_1+\vec{g}_3$$

und dann den Vektor

$$\vec{g}_3{}''=2\vec{g}_2+\vec{g}_3{}'=2\vec{g}_2+(-3\vec{g}_1+\vec{g}_3)=-3\vec{g}_1+2\vec{g}_2+\vec{g}_3$$

gebildet. Dabei hat sich der Nullvektor ergeben:

$$\vec{g}_3{}''=-3\vec{g}_1+2\vec{g}_2+\vec{g}_3=\vec{0}.$$

Wir bestätigen dies nochmals in der üblichen Spaltenschreibweise:

$$-3\vec{g}_1+2\vec{g}_2+\vec{g}_3=-3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+0+3\\-3+4-1\\-3+2+1\\0+2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

Dies bedeutet, daß die drei Zeilenvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$ voneinander **linear abhängig** sind. Man sagt daher auch: die drei Gleichungen sind voneinander linear abhängig.
Geometrisch bedeutet dies, daß die zu den drei Gleichungen gehörenden Ebenen sich nicht in einem Punkte, sondern in einer Geraden schneiden.
Während also alle drei Vektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$ voneinander abhängig sind, erkennt man sofort, daß es darunter wenigstens **zwei** Vektoren gibt, die **linear unabhängig** sind, z.B. die Vektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$; daher sagt man: die Matrix B hat den **„Rang 2“**.

2. Etwas anders ist die Situation bei dem folgenden

Beispiel: $\begin{cases} x+\ y-z=4 \\ 4x-2y-2z=3. \\ -5x+4y+2z=0 \end{cases}$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-4) & \cdot 5 \\ \cdot 1 & \\ & \cdot 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 9 & -3 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B'$$

Wir betrachten zunächst die Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix A:

$$\vec{k}_1=(1;1;-1);\quad \vec{k}_2=(4;-2;-2) \text{ und } \vec{k}_3=(-5;4;2).$$

Mit diesen Vektoren sind die folgenden Umformungen durchgeführt worden:

$$\begin{aligned} \vec{k}_2{}' &= -4\vec{k}_1+\vec{k}_2;\quad \vec{k}_3{}'=5\vec{k}_1+\vec{k}_3 \quad \text{und} \\ \vec{k}_3{}'' &= 3\vec{k}_2{}'+2\vec{k}_3{}'=3(-4\vec{k}_1+\vec{k}_2)+2(5\vec{k}_1+\vec{k}_3) \\ &= -12\vec{k}_1+3\vec{k}_2+10\vec{k}_1+2\vec{k}_3 \\ &= (-2)\vec{k}_1+3\vec{k}_2+2\vec{k}_3. \end{aligned}$$

Daß sich dabei der Nullvektor ergibt, bestätigen wir nochmals in der üblichen Spaltenschreibweise:

$$(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+12-10 \\ -2-\ 6+\ 8 \\ 2-\ 6+\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\vec{0}.$$

Dies bedeutet, daß die drei Zeilenvektoren von A voneinander linear abhängig sind. Da es unter diesen Vektoren aber – wie man sofort sieht – wenigstens **zwei** gibt, die linear **unabhängig** sind, z.B. die Vektoren $\vec{k}_2$ und $\vec{k}_3$, hat die **Koeffizientenmatrix A den Rang 2.**

Von entscheidender Bedeutung für unser Problem ist nun, daß man bei der Ergebnismatrix

$$B'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

durch weitere Umformungen **nicht** erreichen kann, daß die Zahl 1 an der letzten Stelle durch eine 0 ersetzt wird, ohne daß in der dritten Zeile an anderen Stellen wieder von 0 verschiedene Zahlen erscheinen. Begründe dies (Aufgabe 2)!

Während sich also durch Umformung der Matrix A in der letzten Zeile der Nullvektor ergibt, können wir dies bei der Matrix B′ nicht erreichen. Daher sind die drei Zahlenvektoren von B′ voneinander linear unabhängig; die Matrix B′ hat den Rang 3.

Offen bleibt aber die Frage, ob man nicht vielleicht durch **andere Umformungen** der Matrix B erreichen kann, daß am Ende eine vollständige Nullzeile erscheint. Der Nachweis dafür, daß dies nicht der Fall ist, würde umfangreiche Überlegungen erfordern, auf die wir hier verzichten wollen. (Das Problem wird in §14, IV auf Seite 248f. gelöst.) Wir teilen daher hier nur mit, daß sich auf keine Weise durch nichttriviale Linearkombinationen der Zeilenvektoren von B der Nullvektor erzeugen läßt.

Bei diesem Beispiel kann man den Rang der Matrix B natürlich leicht dadurch ermitteln, daß man für deren Zeilenvektoren

$$\vec{g}_1=(1;1;-1;4);\quad \vec{g}_2=(4;-2;-2;3) \text{ und } \vec{g}_3=(-5;4;2;0)$$

das zugehörige Gleichungssystem $c_1\vec{g}_1+c_2\vec{g}_2+c_3\vec{g}_3=\vec{0}$ löst.
Es ergibt sich $c_1=c_2=c_3=0$ (Aufgabe 1d). Dies bedeutet, daß die drei Zeilenvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ von B linear unabhängig sind, daß die Matrix B also tatsächlich ebenfalls den Rang 3 hat.
Die Matrizen A und B haben bei diesem Beispiel also verschiedene Ränge. Man kann die Situation auch folgendermaßen beschreiben: die Abhängigkeit, die bei den Zeilenvektoren der Koeffizientenmatrix A, die sich auf die **linken Seiten** der drei Gleichungen beziehen, vorliegt, wird von den Absolutgliedern der **rechten Seiten** der Gleichungen **nicht** „mitgemacht"; denn es gilt:

$$(-2)\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 0=-8+9+0=1\neq 0$$

und daher $(-2)\vec{g}_1+3\vec{g}_2+2\vec{g}_3\neq\vec{0}$.

Dies ist der tiefere Grund dafür, daß das Gleichungssystem unerfüllbar ist.
Im Gegensatz dazu stimmen beim Beispiel unter 1. die Ränge der beiden Matrizen A und B überein; daher ist dieses Gleichungssystem erfüllbar.

3. Wie die behandelten Beispiele zeigen, kommt es bei der Frage nach der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems auf die Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren der beiden Matrizen A und B an. Wie wir bei den Beispielen bereits gesagt haben, nennt man diese Zahl den **„Rang"** der betreffenden Matrix. Wir definieren:

D13.1 Unter dem „Rang einer Matrix M" versteht man die Höchstzahl der in M enthaltenen linear unabhängigen Zeilenvektoren.

Wir bezeichnen den Rang einer Matrix M mit „rgM", gelesen „Rang von M" oder kurz „Rang M".

Bemerkung: Wir müßten in Definition D13.1 genauer vom **„Zeilenrang"** einer Matrix sprechen. Analog ist der Begriff des **„Spaltenrangs"** zu definieren. Wir werden im III. Abschnitt auf den Zusammenhang zwischen Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix zu sprechen kommen.

4. Bei den bisherigen Beispielen haben wir den Rang einer Matrix dadurch bestimmt, daß wir die Matrix nach dem Gaußverfahren umgeformt haben. Aus der Anzahl der sich dabei ergebenden Nullzeilen haben wir auf die Anzahl der Zeilenvektoren geschlossen, die von den übrigen linear abhängig sind.
Wir behandeln ein weiteres **Beispiel:**

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -3 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \downarrow\cdot 1 \\ \end{array}\begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergeben sich zwei Nullzeilen; nur die erste Zeile enthält von 0 verschiedene Zahlen; daher gilt: $\text{rg}M=1$.

5. Nun kann man bei der Umformung einer Matrix nach dem Gaußverfahren aber in verschiedener Weise vorgehen. Man erhält dann in der Regel auch verschiedene Ergebnisse.

Beispiel:

Wir formen die folgende Matrix in zweifacher Weise um

$$\textbf{1)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 2 & \cdot(-2)\\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 4\\ 0 & -1 & -5 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -4\\ 0 & 5 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 5\\ \downarrow\cdot 1\end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -5 & -4\\ 0 & 0 & -21 & -16\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot(-1)\\ \cdot(-1)\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 21 & 16\end{pmatrix}$$

$$\textbf{2)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 2 & \\ \downarrow\cdot 1 & \cdot 1\\ & \downarrow\cdot 1\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 4\\ 0 & 4 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \cdot 4\\ \downarrow\cdot(-5)\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 21 & 16\end{pmatrix}$$

Es erhebt sich also die Frage, ob sich bei verschiedenen Umformungen einer Matrix nach dem Gaußverfahren stets dieselbe Anzahl linear unabhängiger Vektoren, also derselbe Rang ergibt. Außerdem ist zu klären, ob der Rang einer Matrix bei diesen Umformungen überhaupt erhalten bleibt oder ob er sich bei diesen Umformungen ändern kann.
Auf dieses Problem sind wir schon beim Beispiel unter 2. (Seite 249 f.) aufmerksam geworden; wir haben dort durch unmittelbare Berechnung festgestellt, daß $\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}B'$ ist.
Mit anderen Worten: wir haben zu zeigen, daß die drei Arten von Umformungen, die beim Gaußverfahren angewendet werden, den Rang einer Matrix unverändert lassen, daß es sich – wie man sagt – um **„rangerhaltende Umformungen"** handelt.
Es ist unmittelbar einsichtig, daß der **Austausch zweier Zeilen** die Maximalzahl der in einer Matrix M enthaltenen linear unabhängigen Zeilenvektoren nicht ändert; denn auf die Reihenfolge dieser Vektoren kommt es beim Problem der Abhängigkeit offensichtlich nicht an.
Für die anderen Umformungen ist der Nachweis dafür, daß sie den Rang der Matrix nicht ändern, nicht so leicht zu erbringen. Wir stellen dieses Problem vorerst zurück, wollen den Sachverhalt trotzdem aber schon festhalten in dem Satz

S 13.1 **Die beim Gaußverfahren durchzuführenden Zeilenumformungen lassen den Rang einer Matrix M unverändert.**

Der Beweis wird in § 14, IV (Seite 284 f.) geführt.

Übungen und Aufgaben

1. Untersuche, ob die Zeilenvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$ linear abhängig oder linear unabhängig sind!

a) $\vec{g}_1 = (1; -1; 3)$, $\vec{g}_2 = (-2; 3; -1)$, $\vec{g}_3 = (2; -1; -5)$
b) $\vec{g}_1 = (3; -2; 1)$, $\vec{g}_2 = (1; 3; -3)$, $\vec{g}_3 = (2; -5; 4)$
c) $\vec{g}_1 = (1; -1; 0; 2)$, $\vec{g}_2 = (-1; 2; 1; -1)$, $\vec{g}_3 = (0; 2; 2; 2)$
d) $\vec{g}_1 = (1; 1; -1; 4)$, $\vec{g}_2 = (4; -2; -2; 3)$, $\vec{g}_3 = (-5; 4; 2; 0)$ (vgl. Seite 250)

2. Begründe, warum in der Matrix $B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ die Zahl 1 in der dritten Zeile durch weitere Umformungen **nicht** durch eine 0 ersetzt werden kann, **ohne** daß in dieser dritten Zeile an anderer Stelle wieder von 0 verschiedene Zahlen auftreten! (vgl. Seite 249)

3. Forme die folgenden Matrizen nach dem Gaußverfahren auf wenigstens zwei verschiedene Weisen um! Bestätige dadurch die Aussage von Satz S13.1 und ermittle den Rang der jeweiligen Matrix!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 & -6 \\ 4 & -3 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 16 \\ 4 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & 4 & -2 & -12 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -2 & -4 & 2 & -12 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

4. Ermittle die Ränge der Koeffizientenmatrix A und der zugehörigen erweiterten Matrix B!

a) $\begin{cases} x+y+z-u=3 \\ -x-y+z+u=0 \\ -x+y-z+u=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=0 \\ z-u=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=4 \\ u+z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=1 \\ z-u=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x-2y+3z-u=-5 \\ 2x+y+2z+4u=-1 \\ -x+2y-z=3 \\ y+4z-u=-3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+2y-z-u=1 \\ -x+y+2z+u=-2 \\ -x+4y+3z+u=0 \\ 2x+y-3z-2u=2 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x-y+z=2 \\ y-z+u=3 \\ x+y-u=-1 \\ -x-z+u=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2x+3y-z-5u=-4 \\ x+2y-3z-u=4 \\ -y+z+u=-3 \end{cases}$ **i)** $\begin{cases} 9x-3y+4z=18 \\ 3x+3y+4z=6 \\ 3x-6y-2z=6 \\ 6x-3y+2z=12 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} 4x-3y+6z=6 \\ 2x+2y+3z=4 \\ 4x+3y+3z=6 \\ 2x+6y-3z=-6 \end{cases}$

II. Lösbarkeitsbedingungen für lineare Gleichungssysteme

1. Wir wenden uns nun der Frage zu, unter welchen Bedingungen ein lineares Gleichungssystem lösbar ist. Offenbar hängt die Beantwortung dieser Frage mit den Rängen der Matrizen A und B zusammen.
Da die erweiterte Matrix B eine Spalte mehr enthält als die Koeffizientenmatrix A, ist von vorneherein klar, daß für die Ränge der beiden Matrizen stets gilt:

$$\mathrm{rg}A \le \mathrm{rg}B.$$

Die weiteren Überlegungen beziehen sich auf die Matrizen A′ und B′, die sich nach vollständiger Durchführung des Gaußverfahrens aus den Matrizen A und B ergeben. Wir setzen dabei die Gültigkeit des – bisher noch nicht bewiesenen – Satzes S13.1 voraus, nach dem

$$\mathrm{rg}A' = \mathrm{rg}A \quad \text{und} \quad \mathrm{rg}B' = \mathrm{rg}B \quad \text{ist.}$$

2. Wie die behandelten Beispiele zeigen, können die folgenden Fälle auftreten.

1) Ein lineares Gleichungssystem kann **unerfüllbar** sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich bei den Umformungen eine Zeile der Form

$$0\,0 \dots 0 \mid a \quad \text{mit } a \neq 0$$

ergibt. Die zu dieser Zeile gehörende Gleichung

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = a$$

ist dann offensichtlich unerfüllbar.
Zu beachten ist, daß sich durch **keine** weitere Umformung erreichen läßt, daß die Zahl a an der letzten Stelle durch eine 0 ersetzt wird, ohne daß an wenigstens einer anderen Stelle dieser Zeile wieder eine von 0 verschiedene Zahl erscheinen würde. Dies wäre nämlich nur möglich, wenn in der betreffenden Matrix eine weitere Zeile der Form

$$0\,0 \dots 0 \mid b \quad \text{mit } b \neq 0$$

stünde. Dann aber könnte durch Kombination dieser beiden Zeilen eine weitere vollständige Nullzeile erzeugt werden; eine der beiden Zeilen würde erhalten bleiben. Wenn also nach vollständiger Durchführung des Gaußverfahrens die r-te Zeile die Form

$$0\,0 \dots 0 \mid a \quad \text{mit } a \neq 0$$

hat und darunter höchstens noch vollständige Nullzeilen stehen, so bedeutet dies, daß in den beiden Ergebnismatrizen A' und B' die $r-1$ ersten Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Die r-te Zeile zeigt, daß in der Matrix

A′ kein	|	**B′ genau ein**

weiterer von den darüberstehenden linear unabhängiger Zeilenvektor hinzukommt. Dies bedeutet, daß dann

$\mathrm{rg}A' = r-1$	|	$\mathrm{rg}B' = r$,

also $\mathrm{rg}A' < \mathrm{rg}B'$ und nach Satz S 13.1 auch $\mathrm{rg}A < \mathrm{rg}B$ ist.

2) Ein lineares Gleichungssystem kann also nur dann **erfüllbar** sein, wenn $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}B$ ist. Dabei kann die Lösungsmenge

a) genau ein Element (ein n-Tupel) enthalten oder

b) mit Hilfe von einem Parameter, zwei, drei, ... Parametern darstellbar sein.

Ist die Lösungsmenge mit Hilfe von k Parametern darstellbar, so sagen wir: die Lösungsmenge ist **„k-dimensional“**. Bei Gleichungssystemen mit zwei oder mit drei Variablen ist eine eindimensionale Lösungsmenge geometrisch deutbar als Gerade; eine zweidimensionale Lösungsmenge ist geometrisch deutbar als Ebene.

3. Wir fragen, durch welche Bedingungen die verschiedenen Fälle charakterisiert werden können.
Den in §6, II und III behandelten Beispielen kann man entnehmen, daß sich eine **eindeutige** Lösung genau dann ergibt, wenn der Rang der beiden Matrizen A und B mit der Anzahl n der Variablen übereinstimmt, wenn also

$$\mathrm{rg}B = \mathrm{rg}A = n \quad \text{ist.}$$

Nach den in §7, I behandelten Beispielen können wir ferner sagen:

1) Gilt $rgB = rgA = n-1$, also $n - rgA = 1$, so bedeutet dies, daß die Werte **einer** Variablen frei gewählt werden können, die Lösungsmenge also mit Hilfe **eines** Parameters erfaßt werden kann; die Lösungsmenge ist dann eindimensional.

<u>**Beispiel:**</u> $\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = 3 \end{cases}$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |:5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist $rgA = rgB = 2$. Somit gilt: $n - rgA = 3 - 2 = 1$.
Tatsächlich können die Werte **einer** Variablen frei gewählt werden; die Lösungsmenge ist also eindimensional. Wir setzen z.B. $z = t$ und erhalten aus der zweiten Zeile der umgeformten Matrix: $-y + t = 1 \Leftrightarrow y = t - 1$
und aus der ersten Zeile: $x = -1 - y + 2z = -1 - (t-1) + 2t = -1 - t + 1 + 2t = t$.

Es ergibt sich $\begin{Bmatrix} x = & t \\ y = & -1 + t \\ z = & t \end{Bmatrix}$, anders geschrieben $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dies ist die Gleichung einer Geraden im R_3.

2) Gilt $rgB = rgA = n - 2$, also $n - rgA = 2$, so bedeutet dies, daß die Werte **zweier** Variablen frei gewählt werden können, die Lösungsmenge also mit Hilfe von **zwei** Parametern erfaßt werden kann; die Lösungsmenge ist dann zweidimensional.

<u>**Beispiel:**</u> $\begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ -3x + 6y + 3z = 6 \\ 2x - 4y - 2z = -4 \end{cases}$ Dieses Gleichungssystem haben wir bereits auf Seite 112 behandelt. Es gilt $rgA = rgB = 1$ und somit $n - rgA = 3 - 1 = 2$.

Tatsächlich können die Werte zweier Variablen frei gewählt werden; auf Seite 112 haben wir $x = r$ und $y = s$ gesetzt und eine zweidimensionale Lösungsmenge erhalten.

4. Allgemein können wir sagen: Gilt $rgA = rgB = n - k$, also $k = n - rgA$, so ist die Lösungsmenge k-dimensional. Es gilt der Satz:

S13.2 Ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen, der Koeffizientenmatrix A und der erweiterten Matrix B ist genau dann
1) unerfüllbar, wenn $rgA < rgB$ ist;
2) erfüllbar, wenn $rgA = rgB$ ist.
a) Ist $rgA = rgB = n$, dann hat das Gleichungssystem genau eine Lösung;
b) ist $rgA = rgB < n$ und $k = n - rgA$, dann ist die Lösungsmenge k-dimensional, also mit Hilfe von k Parametern darstellbar.

Bemerkungen:
1) Man nennt die Zahl $k = n - rgA$ auch den **„Rangabfall der Matrix A“.**
2) Wir haben die Gültigkeit von Satz S13.2 an Hand der vorher behandelten Beispiele begründet. In einem allgemeinen Beweis hätten wir zunächst zu zeigen, daß eine Matrix sich durch rangerhaltende Umformungen stets auf Dreiecksform bringen läßt. Wir kommen auf dieses Problem im III. Abschnitt (Seite 262ff.) zurück.

5. Wir behandeln zunächst einige weitere **Beispiele**, darunter u.a. solche, bei denen $m > n$, die Anzahl der Gleichungen also größer als die Anzahl der Variablen ist.

1)
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases} \qquad B = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & -2 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \cdot 2 & \cdot(-3) & \cdot(-3) \\ \downarrow\cdot 1 & & \\ & \downarrow\cdot 1 & \\ & & \downarrow\cdot 1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -11 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & -6 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \cdot 7 & \cdot 4 \\ \downarrow\cdot 3 & \\ & \downarrow\cdot 3 \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -19 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & -19 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -19 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es gilt also: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 3$ und $n - \operatorname{rg} A = 4 - 3 = 1$. Also können wir die Zahlen für eine Variable frei wählen. Wir setzen z.B. $x_4 = t$. Dann ergibt sich:

für x_3: $\quad 2x_3 - 19t = 12 \Leftrightarrow x_3 = 6 + \frac{19}{2}t$;

für x_2: $\quad -3x_2 + 5\left(6 + \frac{19}{2}t\right) - t = 3 \Leftrightarrow -3x_2 + 30 + \frac{95}{2}t - t = 3$

$\Leftrightarrow -3x_2 = -27 - \frac{93}{2}t \Leftrightarrow x_2 = 9 + \frac{31}{2}t$;

für x_1: $\quad x_1 - 2\left(9 + \frac{31}{2}t\right) + 3\left(6 + \frac{19}{2}t\right) + t = 2 \Leftrightarrow x_1 - 18 - 31t + 18 + \frac{57}{2}t + t = 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 30t - \frac{57}{2}t + 2 \Leftrightarrow x_1 = 2 + \frac{3}{2}t$.

Wir erhalten: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2 + \frac{3}{2}t \\ x_2 = 9 + \frac{31}{2}t \\ x_3 = 6 + \frac{19}{2}t \\ x_4 = t \end{array}\right\}$, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 31 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Eine geometrische Interpretation im R_2 oder im R_3 ist in diesem Falle allerdings nicht möglich.

2)
$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + y = -2 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases} \qquad B = \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot 4 & \cdot(-2) \\ \downarrow\cdot(-3) & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \to \left(\begin{array}{rr|r} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Es ist $\operatorname{rg} A = 2$ und $\operatorname{rg} B = 3$. Das Gleichungssystem ist also unerfüllbar. Stelle die Gleichungen im Koordinatensystem dar und bestätige das Ergebnis geometrisch (Aufgabe 1a)!

3)
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 1 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases} \qquad B = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot(-2) & \cdot(-4) \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :7 \\ :7 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist also $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = 2$. Das System ist also eindeutig lösbar. Es gilt: $y = -1$ und $x = 4 + 3y = 4 - 3 = 1$. Das Lösungspaar ist also $(1 \mid -1)$.
Stelle die Gleichungen im Koordinatensystem dar und bestätige das Ergebnis geometrisch (Aufgabe 1b)!

4)
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \qquad B = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{ll} \cdot 2 & \cdot 1 \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es gilt also: $rgA = rgB = 1$. Ferner gilt: $n - rgA = 2 - 1 = 1$. Setzen wir z.B. $y = t$, so ergibt sich: $x = 3 + 2t$. Die vektorielle Darstellung der Lösung lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{dies ist eine Geradengleichung in Parameterform.}$$

Stelle die Gleichungen des Systems im Koordinatensystem dar und bestätige das Ergebnis geometrisch (Aufgabe 1 c)!

5) $$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ -2x + y + 2z = -5 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + 8z = -9 \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \cdot 2 & \cdot(-3) & \cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 & & \\ & \downarrow\cdot 1 & \\ & & \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \cdot 5 & \cdot(-3) \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 34 & -34 \\ 0 & 0 & -17 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ :34 \\ :17 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{llll} & & & \uparrow\cdot 1 \\ & & \uparrow\cdot 1 & \\ & \cdot 1 & \cdot 7 & \cdot(-1) \\ & \downarrow\cdot 1 & & \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow\cdot 1 \\ \cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es ist also $rgA = rgB = 3 = n$. Daher ist das System eindeutig lösbar. Es gilt: $x = 2$, $y = 1$ und $z = -1$. Das Lösungstripel ist $(2|1|-1)$.

6) $$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases} \qquad B = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{lll} \cdot 2 & \cdot(-3) & \cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 & & \\ & \downarrow\cdot 1 & \\ & & \downarrow\cdot 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{ll} & \\ \cdot 5 & \cdot(-1) \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Es gilt also: $rgA = 3$ und $rgB = 4$. Daher ist das Gleichungssystem unerfüllbar.

Übungen und Aufgaben

1. Stelle die Gleichungen graphisch dar und bestätige dadurch die Lösung des Gleichungssystems geometrisch!

a) (vgl. Seite 255) $\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 4x + y = -2 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$

b) (vgl. Seite 255) $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x + y = 1 \\ 4x - 5y = 9 \end{cases}$

c) (vgl. Seite 255) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \\ -x + 2y = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 2 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$

2. Ermittle zum folgenden Gleichungssystem jeweils rgA und rgB und stelle fest, ob das System lösbar ist oder nicht! Bestimme die Lösungsmenge und deute sie geometrisch!

a) $\begin{cases} 3x-2y+3z=4 \\ x-y+4z=1 \\ 5x-3y+2z=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+2z=-6 \\ 2x+3z=-8 \\ 2x-2y+4z=-2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+4y+3z=2 \\ x+y+z=2 \\ 3x+3y+z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x+3y-3z=-3 \\ -2x-y+z=1 \\ 4x+2y-2z=-2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x-2y+4z=6 \\ x-y+2z=6 \\ x+y+z=-2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=1 \\ 8x+4y-3z=5 \end{cases}$

3. Untersuche das Gleichungssystem auf Lösbarkeit! Ermittle die Lösungsmenge!

a) $\begin{cases} x+y+z=-3 \\ y+z+u=1 \\ z+u+v=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-y+4z=-1 \\ 2y+2u-5v+w=4 \\ x-2y+z+2v=-3 \\ x+y+8z+u-4v=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x+2y+2z=4 \\ 3x-5y+2z=2 \\ 3x+3y+4z=6 \\ 3x-6y-2z=6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-5y-3z-2u-v=-11 \\ 3x+2y+z+5v=1 \\ 2x+3y-z-u+4v=-2 \end{cases}$

4. Bestimme die Lösungen der Gleichungssysteme in §13, I, Aufgabe 4 (Seite 252)!

5. Ermittle alle ganzen rationalen Funktionen 3. Grades, auf deren Graphen die Punkte $P(-1|6)$, $Q(0|3)$ und $R(1|4)$ liegen!

6. Eine ganze rationale Funktion 4. Grades habe die Nullstelle 0; außerdem liegen $P(1|1)$ und $Q(-1|-1)$ auf dem Graphen. Ermittle die Schar dieser Funktionen!

7. Werden chromgelbe Farbpigmente mit blauen gemischt, so entstehen brillante Grüntöne. Ein bestimmtes sattes Grün enthält 90 Anteile Chromgelb und 10 Anteile Blau. Um diese Farbe herzustellen, stehen drei andere Farben mit unterschiedlichen Anteilen (vgl. Tabelle!) zur Verfügung. Ermittle alle Möglichkeiten für eine Mischung aus I, II und III!

Sorten / Anteile	I	II	III
Chromgelb	80	95	100
Blau	20	5	0

8. Der neu aufgeschwemmte Humusboden in einer rekultivierten Braunkohlengrube soll durch einen Mineraldünger verbessert werden. Auf Grund der Bodenanalysen soll ein NPK-Dünger gestreut werden mit 12 Anteilen Stickstoff (N), 15 Anteilen Phosphaten (P) und 18 Anteilen Kali (K). Gemischt werden kann er aus vier handelsüblichen NPK-Düngern. Ermittle alle Möglichkeiten!

Sorten / Anteile	I	II	III	IV
N	10	15	15	10
P	30	10	15	15
K	0	20	15	20

9. Ein bestimmter Orange-Ton enthält 60 Anteile Chromgelb und 40 Anteile Rot. Ermittle alle Möglichkeiten, wie er aus vier anderen Farbtönen der gleichen Serie gemischt werden kann!

Anteile \ Sorten	I	II	III	IV
Chromgelb	30	80	50	90
Molybdatrot	70	20	50	10

10. Als Geschenksortimente bietet ein Weingut von der Mosel Kisten mit je 10 Flaschen Wein an. Beteiligt sind daran vier Sorten unterschiedlicher Qualität und Preislage. Kannst du aus den jeweiligen Gesamtkosten der einzelnen Sortimente die Flaschenpreise der beteiligten Weinsorten ermitteln?

Preis \ Sorten	I	II	III	IV
57 DM	5	3	2	0
64 DM	4	2	2	2
76 DM	0	2	4	4

11. Gegeben sind die linearen Gleichungssysteme:

$$S_1: \begin{cases} x+y +2u=0 \\ 2x+y+z+3u=0 \\ -y+2z+u=0 \\ x +z+u=0 \end{cases} \quad \text{und} \quad S_2: \begin{cases} x+y +2u=-k+2 \\ 2x+y+z+3u=2k \\ -y+2z+u=0 \\ x +z+u=k^2 \end{cases}$$

a) Ermittle die Lösungsmenge L_1 des Systems S_1? Welche Dimension hat sie?
b) Bestimme die Lösungsmenge L_3 für das nur aus den beiden ersten Gleichungen von S_1 bestehende Gleichungssystem S_3! Welche Dimension hat L_3?
c) Untersuche, für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ das inhomogene Gleichungssystem S_2 lösbar ist! Ermittle für diese Werte von k den Lösungsvektor!

12. Ermittle alle Werte von $k \in R^{\neq 0}$, für welche die folgenden vier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ linear abhängig sind!
Bestimme ferner alle k, für die $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind!

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\-k\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}k\\1\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-2k\\k\end{pmatrix}, \quad \vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\2k\\1\end{pmatrix}$$

13. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\vec{a}x+\vec{b}y+\vec{c}z=\vec{d} \text{ mit } \vec{a}=\begin{pmatrix}12\\7\\2k\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}3k\\1\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{d}=\begin{pmatrix}3k-9\\0\\16\end{pmatrix} \text{ und } k\in\mathbb{R}.$$

a) Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem genau eine Lösung?
b) Stelle den Lösungsvektor in Abhängigkeit von k dar! Für welches k wird $x=\frac{1}{3}$? Berechne für dieses k auch y und z!
c) Untersuche, für welche k das Gleichungssystem unlösbar ist!
Zeige, daß sich für dieses k der Vektor $\vec{a}$ aus den beiden Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear erzeugen läßt!
d) Bestimme k so, daß das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat! Stelle diese Lösungsmenge dar und deute sie geometrisch!

14. Gegeben sei eine Schar von Ebenen $\varepsilon(k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ durch $x-2y+kz=0$.
a) Zeige, daß alle Ebenen $\varepsilon(k)$ eine Gerade g gemeinsam haben! Ermittle eine Parametergleichung von g!
b) Zu jeder Ebene $\varepsilon(k)$ der Schar gibt es eine zu ihr parallele Ebene $\varepsilon^*(k)$, die durch den Punkt $P(-1|1|-1)$ geht. Ermittle eine Normalengleichung von $\varepsilon^*(k)$! Für welches $k \in \mathbb{R}$ fällt $\varepsilon(k)$ mit $\varepsilon^*(k)$ zusammen?
c) Untersuche, ob es zu jeder Ebene $\varepsilon(k)$ eine auf ihr senkrechte Ebene $\varepsilon^*(k')$ mit $k' \in \mathbb{R}$ gibt! Ermittle k' für $k=1$, bestimme die zugehörigen Ebenengleichungen und ermittle für diese Ebenen die Spurgeraden in den drei Koordinatenebenen!
d) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit $k \in \mathbb{R}$. Ermittle die Lösungsmenge $L(k)$!

$$\begin{cases} x-2y+kz = 0 \\ x-2y+(k-1)z=0 \\ x-2y-2kz = (k-3)(k+1) \end{cases}$$

e) Untersuche, wie sich die Lösungsmenge aus dem Ergebnis von a) durch geometrische Überlegungen bestätigen läßt!

III. Der Zeilen- und der Spaltenrang einer Matrix

1. Wie wir bereits im §7, III erörtert haben, führt die Untersuchung von n Vektoren auf lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit auf ein **homogenes Gleichungssystem,** also auf ein System, bei dem für alle Absolutglieder auf der rechten Seite gilt: $r_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, m)$. Wir haben in §7, III (Seite 120) bereits festgestellt, daß jedes solche System erfüllbar ist, weil es auf jeden Fall die triviale Lösung

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$$

besitzt. Durch Anwendung von Satz S 13.2 auf diesen Sonderfall ergibt sich der Satz

S 13.3 Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit n Variablen hat
1) nur die triviale Lösung genau dann, wenn $\mathrm{rg}A=n$ ist;
2) eine k-dimensionale Lösungsmenge genau dann, wenn $\mathrm{rg}A<n$ und $k=n-\mathrm{rg}A$ ist.

Begründe den Satz im einzelnen (Aufgabe 2b)!

2. Als **Beispiel** untersuchen wir drei Vektoren

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix};\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$$

auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit. Wir formen die zugehörige Koeffizientenmatrix A um:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&3\\3&-1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 2 \;\; \cdot(-3)\\ \downarrow\cdot 1 \\ \downarrow\cdot 1\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&5\\0&-7&-2\end{pmatrix}|:5\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&-7&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot 7\\ \downarrow\cdot 1\end{matrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

Man erkennt, daß $\mathrm{rg}A=3$ ist. Das zugehörige Gleichungssystem hat nur die triviale Lösung: $c_1=c_2=c_3=0$. Daher sind die drei Vektoren linear unabhängig.

3. Wir können dem Ergebnis der Rechnung des vorigen Beispiels noch eine neue Erkenntnis entnehmen. Das gestellte Problem war, die drei **Spaltenvektoren** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen. Zu diesem Zwecke haben wir die zugehörige Koeffizientenmatrix A durch **Zeilenumformungen** den Rang dieser Matrix bestimmt. In Definition D 13.1 haben wir als Rang einer Matrix aber die Höchstzahl der in der Matrix vorkommenden **Zeilenvektoren** definiert. Man müßte genauer von **„Zeilenrang"** der Matrix sprechen und diesen z.B. mit „$\mathrm{rg}_z A$" bezeichnen. Beim letzten Beispiel gilt: $\mathrm{rg}_z A = 3$.
Dieses Ergebnis gestattet eine doppelte Interpretation: einerseits ergeben die Umformungen, daß die **Zeilenvektoren** $\vec{g}_1 = (1;2;1)$; $\vec{g}_2 = (-2;1;3)$ und $\vec{g}_3 = (3;-1;1)$ linear unabhängig sind; andererseits haben wir aus der Tatsache der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Gleichungssystems geschlossen, daß die drei **Spaltenvektoren** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ ebenfalls linear unabhängig sind, daß also – anders ausgedrückt – der **Spaltenrang** der Matrix A ebenfalls den Wert 3 hat: $\mathrm{rg}_{Sp} A = 3$.
Dazu definieren wir entsprechend zu D 13.1:

D 13.2 Unter dem „Spaltenrang einer Matrix M" versteht man die Höchstzahl der in M enthaltenen linear unabhängigen Spaltenvektoren.

Wir bezeichnen den Spaltenrang einer Matrix mit „$\mathrm{rg}_{Sp} M$", den Zeilenrang mit „$\mathrm{rg}_Z M$".

4. Im letzten Beispiel haben wir gesehen, daß der Zeilenrang und der Spaltenrang der betreffenden Matrix den gleichen Wert haben; es gilt bei diesem Beispiel:

$$\mathrm{rg}_Z A = \mathrm{rg}_{Sp} A = 3.$$

Wir behandeln ein weiteres **Beispiel:**

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 & \cdot 2 \\ \downarrow\cdot 1 & \\ & \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 3 \\ \downarrow\cdot 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\mathrm{rg}_Z A = 2$. Das fragliche Gleichungssystem hat also eine nichttriviale Lösung; d.h. die drei Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sind linear abhängig.
Andererseits erkennt man sofort, daß es wenigstens zwei linear unabhängige Spaltenvektoren gibt, z.B. $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$; daher gilt: $\mathrm{rg}_{Sp} A = 2$, also auch bei diesem Beispiel

$$\mathrm{rg}_Z A = \mathrm{rg}_{Sp} A.$$

5. Man kann vermuten, daß es sich um einen allgemeinen, also für **alle** Matrizen geltenden Sachverhalt handelt. Dies wollen wir im folgenden mit Hilfe der rangerhaltenden Umformungen des Gaußverfahrens beweisen.
Außer den oben besprochenen Zeilenumformungen wollen wir hierbei als weitere Umformungsart das **Vertauschen zweier Spalten** zulassen. Wir haben also zu zeigen, daß eine solche Umformung den **Zeilenrang** einer Matrix nicht ändert.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, vertauschen wir in der gegebenen Matrix M zunächst sämtliche Zeilen mit den entsprechenden Spalten, gehen also zur sogenannten **„transponierten Matrix"** M^T über.

Beispiel:

$$\text{Für } M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -7 & -2 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ ist } M^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & -7 & 2 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Hat M also m Zeilen und n Spalten, so hat M^T n Zeilen und m Spalten; außerdem gilt: $(M^T)^T=M$.

Dann haben wir zu zeigen, daß in jeder Matrix M^T ein **Vertauschen zweier Zeilen den Spaltenrang** nicht ändert.

Es seien $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m$ die Zeilenvektoren von M, also die Spaltenvektoren von M^T. Wir greifen aus diesen Vektoren eine **beliebige Auswahl** heraus, z.B. die ersten k Vektoren. Dann gehört zum Problem der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit dieser Vektoren das Gleichungssystem

$$c_1\vec{g}_1+c_2\vec{g}_2+\ldots+c_k\vec{g}_k=\vec{0},$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{cases} c_1 g_{11}+c_2 g_{21}+\ldots+c_k g_{k1}=0 \\ c_1 g_{12}+c_2 g_{22}+\ldots+c_k g_{k2}=0 \\ \text{-----------------------} \\ c_1 g_{1n}+c_2 g_{2n}+\ldots+c_k g_{kn}=0. \end{cases}$$

Vertauscht man nun in M^T zwei Zeilen, so bedeutet dies das Vertauschen der entsprechenden Gleichungen in diesem Gleichungssystem. Dies hat offensichtlich keinen Einfluß auf die Lösungen des Systems, also auch nicht darauf, ob diese Vektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Die gleiche Überlegung kann man bei **jeder beliebigen Auswahl** von Zeilenvektoren von M^T anstellen. In keinem Fall ändert sich durch die Vertauschung etwas an der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit dieser Vektoren. Dies bedeutet, daß eine **Vertauschung zweier Zeilen von M^T den Spaltenrang von M^T** und somit eine **Vertauschung zweier Spalten von M den Zeilenrang von M nicht beeinflußt.**

Es gilt also der Satz

S 13.4 **1) Das Vertauschen zweier Spalten einer Matrix M läßt den Zeilenrang von M unverändert.**
2) Das Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix M läßt den Spaltenrang von M unverändert.

Bemerkung: Da offensichtlich das Vertauschen zweier Zeilen den Zeilenrang und das Vertauschen zweier Spalten den Spaltenrang nicht beeinflußt, kann man zusammenfassend sagen:

Das Vertauschen zweier Zeilen und das Vertauschen zweier Spalten einer Matrix M lassen den Zeilen- und den Spaltenrang von M unverändert.

6. Wir wollen nun zeigen, daß bei jeder Matrix M der Zeilenrang $\mathrm{rg}_Z M$ und der Spaltenrang $\mathrm{rg}_{Sp} M$ übereinstimmen.
Gegeben sei eine Matrix M mit m Zeilen und n Spalten:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir formen die Matrix nach dem Gaußverfahren um; wir wollen erreichen, daß in der Hauptdiagonale, also an den Stellen, die durch die Indexpaare $(1|1)$, $(2|2)$, $(3|3)$ usw. gekennzeichnet sind, – soweit es möglich ist – jeweils die Zahl 1 und **darüber und darunter** jeweils die Zahl 0 steht. Wir wenden also das **erweiterte Gaußverfahren** an, bei dem jeweils auch die weiter oben stehenden Zeilen so umgeformt werden, daß auch **über** dem betreffenden Hauptdiagonalglied am Ende jeweils nur die Zahl 0 steht.

Wenn für **alle** Elemente der Matrix gilt: $a_{ik} = 0$, so gilt $\mathrm{rg}_Z M = \mathrm{rg}_{Sp} M = 0$. Wir setzen also für das folgende voraus, daß für wenigstens ein Element gilt: $a_{ik} \neq 0$.

1. Schritt: Falls $a_{11} = 0$ ist, bringen wir durch Vertauschen der i-ten mit der ersten Zeile und der k-ten mit der ersten Spalte das von 0 verschiedene Element a_{ik} an die Stelle $(1|1)$; dann dividieren wir die erste Zeile durch die Zahl a_{ik}; damit erhalten wir in der neuen Matrix das Element $b_{11} = 1$.
Mit Hilfe dieses Elementes können wir durch entsprechende Zeilenkombinationen alle unter b_{11} stehenden Elemente der ersten Spalte zu 0 machen. Die Matrix hat dann die Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cline{2-4} 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{array}\right).$$

Wenn ab der zweiten Zeile alle Elemente dieser Matrix 0 sind, dann gilt $\mathrm{rg}_Z M = \mathrm{rg}_{Sp} M = 1$. Begründe dies (Aufgabe 3a)!

2. Schritt: Gilt für wenigstens ein Element b_{ik} mit $i \geq 2$: $b_{ik} \neq 0$, so bringen wir es – falls nötig – durch Vertauschen der entsprechenden Zeilen und Spalten an die Stelle $(2|2)$ und dividieren die zweite Zeile durch b_{ik}. Dann gilt in der neuen Matrix: $c_{22} = 1$. Mit Hilfe dieser Zahl können wir durch passende Zeilenkombinationen alle Elemente der zweiten Spalte (außer c_{22}) zu 0 machen. Die Matrix hat dann die Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{m3} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Sind dann ab der dritten Zeile alle Elemente dieser Matrix 0, so gilt $\mathrm{rg}_Z M = \mathrm{rg}_{Sp} M = 2$. Begründe dies (Aufgabe 3b)!

Wir setzen dieses Verfahren fort, bis es nach r Schritten abbricht; dies ist der Fall, wenn $r=n$ oder wenn $r=m$ ist oder wenn unterhalb der r-ten Zeile alle verbleibenden Elemente den Wert 0 haben. Die letzte Matrix hat in den drei möglichen Fällen die folgende Form:

1) Für $r=n$ und $m>n$:
$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{r Zeilen} \\ \\ \\ \end{array},$$

oder, wenn $m=n$ ist:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist offensichtlich $rg_Z M = rg_{Sp} M = r = n$.

2) Für $r=m$ und $m<n$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 1}_{\text{r Spalten}} & & & & & \underbrace{* \quad \dots \quad *}_{\text{n}-\text{r Spalten}} \end{pmatrix}$$

Hier stehen die Sterne für beliebige Zahlen.

In diesem Fall ist $rg_Z M = r = m$, aber auch $r_{Sp} M = r$, weil jeder der restlichen Spaltenvektoren als Linearkombination der r ersten Spaltenvektoren dargestellt werden kann. Ist einer dieser Vektoren z.B., der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \quad \text{so gilt} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Für $r<n$ und $r<m$:

$$\begin{array}{l} \text{r Zeilen}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \text{m}-\text{r Zeilen}\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{\text{r Spalten}} & & & & & \underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{\text{n}-\text{r Spalten}} \end{pmatrix}$$

Die Sterne stehen auch hier für beliebige Zahlen.

In diesem Falle ist $rg_Z M = r$, aber auch $rg_{Sp} M = r$, weil auch hier jeder der restlichen Spaltenvektoren aus den r ersten Spaltenvektoren linear erzeugt werden kann.

In jedem der drei möglichen Fälle gilt also in der Tat: $rg_Z M = rg_{Sp} M = r$.

Damit haben wir bewiesen:

S13.5 Bei jeder Matrix M stimmen Zeilen- und Spaltenrang überein.

7. An Hand der durchgeführten Überlegungen zur Umformung einer Matrix können wir nun auch die Gültigkeit von Satz S13.2 über die Lösbarkeitsbedingungen von linearen Gleichungssystemen beweisen. Wir müssen allerdings die Einschränkung machen, daß wir noch nicht nachgewiesen haben, daß die Umformungen des Gaußverfahrens den Rang einer Matrix unverändert lassen. Diesen Satz (S13.1) werden wir in §14 – und zwar ohne Rückgriff auf die hier behandelten Sätze – beweisen.
Wir denken uns die im Vorstehenden beschriebenen Umformungen bei der **Koeffizientenmatrix A** eines linearen Gleichungssystems von m Gleichungen mit n Variablen durchgeführt. Über die bei unseren Beispielen praktizierten Umformungen hinaus können dabei zusätzlich Vertauschungen von Spalten vorgenommen worden sein. Eine Vertauschung zweier Spalten in der Koeffizientenmatrix A bedeutet für das Gleichungssystem ein Vertauschen der entsprechenden Variablen, also eine Umbenennung dieser Variablen. Da man diese Umbenennung am Ende der Rechnung wieder rückgängig machen kann, ist ein Spaltentausch für das Problem der Erfüllbarkeit eines Gleichungssystems ohne Belang.
Wir denken uns ferner die mit der Matrix A durchgeführten Umformungen in der genau gleichen Weise auch bei der erweiterten Matrix B vorgenommen. Auf die hinzugefügte letzte Spalte der Absolutglieder des Gleichungssystems werden dann nur Zeilenumformungen angewendet; diese Spalte bleibt also stets an der letzten Stelle.
Ist nun $rg A < rg B$, so ergibt sich – wie wir auf Seite 253 bereits begründet haben – eine unerfüllbare Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = a \quad \text{mit} \quad a \neq 0.$$

Das System ist dann ebenfalls unerfüllbar. Wir setzen also voraus, daß $rg A = rg B$ ist und betrachten die drei oben angegebenen Fälle für das Ergebnis der Umformung der Matrix A.
In **Fall 1)** ist $rg A = n$. Die zugehörigen Gleichungen sind alle von der Form $x_k = s_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), wobei s_k das k-te Element in der letzten Spalte der Ergebnismatrix B′ bezeichnet. Das System ist also eindeutig lösbar.
In den **Fällen 2) und 3)** ist $rg A = r < n$. Man erkennt, daß man die Werte der zu den letzten $n - r$ Spalten gehörenden Variablen $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ frei wählen, also durch einen Parameter erfassen kann; die Werte für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sind dann eindeutig festgelegt. Setzen wir $k = n - r$, so hat das System also eine k-dimensionale Lösungsmenge.
Damit ist Satz S13.2 bewiesen.

Bemerkung: Wird das Gaußverfahren so vollständig durchgeführt, wie wir es bei dem vorstehenden Beweis beschrieben haben, so erhält man am Ende auch genauen Aufschluß über diejenigen Variablen, deren Werte man frei wählen kann, die man also durch einen Parameter zu erfassen hat. Man läuft dann also nicht Gefahr, eine „falsche“ Variable durch einen Parameter zu ersetzen. Insofern haben die beim obigen Beweis durchgeführten Überlegungen durchaus auch einen praktischen Nutzen für die Bestimmung der Lösungen des betreffenden Gleichungssystems.

Übungen und Aufgaben

1. Ermittle jeweils die Lösungsmenge der folgenden homogenen Gleichungssysteme!

a) $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 5x-y+4z=0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -x-3y+z=0 \\ 2x+5y-2z=0 \\ 3x+6y-3z=0 \\ -3x-8y+3z=0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y+z+u=0 \\ x+y-z+u=0 \\ x+y+z-u=0 \\ x+y+z+u=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+3z+u=0 \\ -x+2y-z+3u=0 \\ x+y+2z+4u=0 \\ 3x-3y+4z-2u=0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x-y+3z+u=0 \\ -x+2y-z+3u=0 \\ 2x+y-z+4u=0 \\ 3x-3y+4z-2u=0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x-y=0 \\ y+z=0 \\ z-u=0 \\ x+u=0 \end{cases}$

2. a) Bestätige die Aussage von Satz S 13.3 an Hand der Aufgaben 1!
b) Begründe die Herleitung von Satz S 13.3 im einzelnen! (vgl. Seite 259!)

3. a) In einer Matrix M sei $b_{11}=1$; ferner seien von der zweiten Zeile an alle Elemente gleich Null. Begründe, daß dann $rg_Z M = rg_{Sp} M = 1$ gilt! (vgl. Seite 262!)
b) In einer Matrix M sei $c_{11}=c_{22}=1$ und $c_{21}=0$; ferner seien von der dritten Zeile an alle Elemente gleich Null. Begründe, daß dann $rg_Z M = rg_{Sp} M = 2$ gilt! (vgl. Seite 262!)

4. Bilde zu den folgenden Matrizen jeweils die transponierte Matrix und vollziehe die Beweisschritte zu Satz S 13.4 im einzelnen nach!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Vollziehe die Beweisschritte von Satz S 13.5 an den folgenden Matrizen im einzelnen nach!

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. Die folgenden Gleichungssysteme sind mit den Matrizen von Aufgabe 5 gebildet. Ermittle die Lösungsmengen!

a) $\begin{cases} y-z+v=-1 \\ -x-2z+u=-1 \\ x-y+2u=6 \\ z-u+2v=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+u=0 \\ x+y+u=2 \\ x+y+z=4 \\ x+y+z+u=3 \\ y+z+u=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+z+2u+v+2w=-1 \\ z+u+w=-2 \\ y+z+2u+v+w=1 \\ x-y+3z+5u+4w=-8 \\ y+v=3 \end{cases}$

7. Untersuche, für welche reelle Zahl a das folgende Gleichungssystem lösbar ist und ermittle die Lösungsmenge!

$x+y+z-u=a \wedge x+y-z-u=1 \wedge x+y+z-u=3$

8. **a)** Untersuche, ob es Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß das Gleichungssystem

$ax+4y+z=5 \wedge 2x+3y+z=b \wedge 3x+2y+z=-5$

1) unerfüllbar, **2)** eindeutig lösbar ist bzw. **3)** unendlich viele Lösungen hat!

b) Ermittle in den Fällen 2) und 3) die Lösungsmenge!

c) Untersuche die Lagebeziehung der drei Ebenen, die in den drei Fällen durch die Gleichungen dargestellt werden!

9. Ermittle die gegenseitige Lage der drei Ebenen!

a) ε_1: $x+2y-4z=-5$; ε_2: $4x-3y+6z=2$; ε_3: $x-y+2z=1$

b) ε_1: $x-2y+3z=2$; ε_2: $x+5y+2z=-3$; ε_3: $2x-3y-2z=19$

c) ε_1: $x+y-z=3$; ε_2: $x-y+z=1$; ε_3: $2x+3y-3z=8$

10. Ermittle die gegenseitige Lage von Ebene ε und Gerade g!

a) ε: $3x-2y-4z=8$, g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$

b) ε: $2x-7y-5z=-4$, g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$

c) ε: $x-y+2z=-3$, g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

11. Ermittle die gegenseitige Lage der Ebenen ε_1 und ε_2!

a) ε_1: $x+2y+2z=1$; ε_2: $3y+2z=2$

b) ε_1: $x-2y+z=5$; ε_2: $x-2y+z=-1$

c) ε_1: $x+y+z=-2$; ε_2: $x+2y-z=-6$

12. Deute die folgenden Gleichungssysteme und ihre Lösungen geometrisch!

a) $\begin{cases} x-2y=1\\ x+y=4\\ 2x-y=5\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=2\\ 2x-y-2z=-2\\ x+4y+3z=2\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=0\\ x-2y=1\\ x-5y=3\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-y+z=1\\ -2x+2y-2z=-2\\ 3x-3y+3z=4\end{cases}$

e) $\begin{cases} x-y-z=0\\ x-y+z=2\\ x-y=1\end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x+5y+3z=3\\ x+9y+5z=5\\ x+y+z=1\\ x+3y+2z=2\end{cases}$ **g)** $\begin{cases} x+y=1\\ x-y=3\\ 2x+y=3\\ x-3y=5\end{cases}$

h) $\begin{cases} x+2z=1\\ y+z=5\\ x-y+2z=0\\ y-z=4\end{cases}$ **i)** $\begin{cases} x-y+z=1\\ -x-2y+4z=1\\ 3x-2z=1\\ 2x+y-3z=0\end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x-2y+3z=7\\ x+2y-5z=7\\ 3x-2y+z=21\\ -x+2y-3z=-7\end{cases}$

13. Die Matrix B' eines linearen Gleichungssystems habe am Ende der Umformungen die angegebene Gestalt. Wie liegen die Ebenen, die durch die Gleichungen des ursprünglichen Systems dargestellt werden? Die Sterne stehen hier für von Null verschiedene Zahlen.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & *\\ 0 & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & *\end{array}\right)$ **b)** $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & *\\ 0 & 0 & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ **c)** $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & *\\ 0 & 0 & 0 & *\end{array}\right)$ **d)** $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

14. Wie können drei Ebenen zueinander liegen, wenn für die umgeformten Matrizen des zugehörigen Gleichungssystems gilt:

a) $\operatorname{rg} A'=2$ und $\operatorname{rg} B'=3$; **b)** $\operatorname{rg} A'=\operatorname{rg} B'=2$?

§ 14 Vektorräume

I. Der Begriff des Vektorraums

1. In §2 und §3 haben wir für Vektoren zwei Verknüpfungen definiert: die Vektoraddition und die Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor, die sogenannte S-Multiplikation. Außerdem haben wir die grundlegenden Gesetze hergeleitet, die für diese beiden Verknüpfungen gelten.
Nun gibt es außer den Pfeilklassen und den Zahlenpaaren, Zahlentripeln und Zahlen-n-tuplen noch zahlenreiche weitere mathematische Objekte, für die man Verknüpfungen dieser Art so definieren kann, daß dieselben Gesetze gelten. Wir behandeln das folgende

Beispiel:

Es sei F die Menge aller Funktionen, die über der Menge $\mathbb{R}$ definiert sind.

1) Die **Addition** zweier Funktionen f_1, $f_2 \in F$ erklären wir in naheliegender Weise mit Hilfe der Funktionswerte $f_1(x)$ und $f_2(x)$ folgendermaßen:

$f_1 + f_2 = f$ bedeutet, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

Man kann leicht zeigen, daß für diese Verknüpfung die Gesetze K, A, N und I gelten (Aufgabe 1).
Das neutrale Element in F ist die Nullfunktion n, bei der für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $n(x) = 0$. Eine Funktion f hat als inverse Funktion die Funktion g zu $g(x) = -f(x)$; denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) + [-f(x)] = f(x) - f(x) = 0 = n(x).$$

Wir bezeichnen diese Funktion mit „$-f$"; dann gilt $f + (-f) = n$.
Die Menge F aller Funktionen über $\mathbb{R}$ bildet also mit der Addition als Verknüpfung eine **„kommutative Gruppe".** Man sagt auch: das Verknüpfungsgebilde $(F, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

2) Die Multiplikation einer Funktion $f \in F$ mit einer reellen Zahl r erklären wir ebenfalls mit Hilfe der Funktionswerte $f(x)$ folgendermaßen:

$rf = g$ bedeutet, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $rf(x) = g(x)$.

Man kann leicht zeigen, daß für diese Verknüpfung die gleichen Gesetze gelten wie für die S-Multiplikation von Vektoren, nämlich:

$\boxed{1}$ Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und alle $f \in F$ gilt: $r(sf) = (rs)f$.

$\boxed{2}$ Für alle $r, s \in \mathbb{R}$ und alle $f \in F$ gilt: $(r + s)f = rf + sf$.

$\boxed{3}$ Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $f, g \in F$ gilt: $r(f + g) = rf + rg$.

Außerdem halten wir noch fest:

$\boxed{4}$ Für alle $f \in F$ gilt $1f = f$.

2. Vor einer ähnlichen Situation standen wir im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, als wir feststellten, daß in zahlreichen Fällen die Gesetze A, N, I und häufig auch das Gesetz K gelten. Wir haben diese Erkenntnis seiner Zeit zum Anlaß genommen, die Begriffe „Gruppe" und „kommutative Gruppe" einzuführen.

Beispiele: Die Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{Z}; +)$; $(\mathbb{R}; +)$; $(\mathbb{Q}^{+0}; \cdot)$ und $(\mathbb{R}^{+0}; \cdot)$ sind kommutative Gruppen.

3. Weitere Beispiele für allgemeine Begriffe, mit denen gemeinsame Eigenschaften von Verknüpfungsgebilden erfaßt werden, sind die Begriffe des **„Körpers"** und des **„kommutativen Körpers"**.

Diese Begriffe beziehen sich auf Fälle, in denen für die Elemente einer Menge M zwei Verknüpfungen, eine Addition und eine Multiplikation definiert sind, also auf „zweifache Verknüpfungsgebilde". Wir definieren:

D 14.1 Ein zweifaches Verknüpfungsgebilde $(M; +; \cdot)$ heißt ein „kommutativer Körper" genau dann, wenn gilt:

$\boxed{1}$ das Gebilde $(M; +)$ ist eine kommutative Gruppe;

$\boxed{2}$ das Gebilde $(M^{+0}; \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe;

$\boxed{3}$ für alle a, b, $c \in M$ gilt: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz).

Beispiele für kommutative Körper sind insbesondere die zweifachen Verknüpfungsgebilde $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$ und $(\mathbb{R}; +; \cdot)$.

4. Die bei Vektoren und bei Funktionen vorliegende Situation ist insofern noch komplexer, als hierbei nicht nur zwei Verknüpfungen (die Vektorenaddition und die S-Multiplikation), sondern darüber hinaus auch zwei Mengen eine Rolle spielen: die Menge V der „Vektoren" und die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wir definieren:

D 14.2 Eine Menge V, für deren Elemente eine Addition und eine S-Multiplikation mit reellen Zahlen definiert sind, heißt ein „Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen" genau dann, wenn gilt:

$\boxed{1}$ Das Gebilde $(V; +)$ ist eine kommutative Gruppe.

$\boxed{2}$ S_1: Für alle r, $s \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt: $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$.

S_2: Für alle r, $s \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt: $(r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$.

S_3: Für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a}, \vec{b} \in V$ gilt: $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$.

S_4: Für alle $\vec{a} \in V$ gilt: $1\vec{a} = \vec{a}$.

Einer Erläuterung bedarf insbesondere das Gesetz S_4, weil dessen Gültigkeit selbstverständlich erscheint. Es ist aber nötig, um unerwünschte Sonderfälle auszuschließen. Man könnte sonst eine S-Multiplikation z. B. folgendermaßen definieren:

für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $\vec{a} \in V$ gilt: $r\vec{a} = \vec{0}$.

Dann wären – wie man leicht nachprüft – die Gesetze S_1, S_2 und S_3 erfüllt. Diese – unerwünschte – Möglichkeit wird durch Aussage von S_4 ausgeschlossen.

Außerdem wird dieses Gesetz beim Beweis für den Satz $r\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow r=0 \vee \vec{a}=\vec{0}$ benötigt:

1) Ist $r=0$, so gilt auch $r=0 \vee \vec{a}=\vec{0}$.

2) Ist $r \neq 0$, so existiert der Kehrwert $\frac{1}{r}$ und man kann schließen:

$$r\vec{a}=\vec{0} \Rightarrow \frac{1}{r}(r\vec{a})=\left(\frac{1}{r}\cdot r\right)\vec{a}=1\vec{a}=\vec{0}.$$

Um an dieser Stelle auf $\vec{a}=\vec{0}$ schließen zu können, benötigt man die Aussage S_4. Weitere Beispiele für Vektorräume sind Gegenstand der Aufgaben 2 bis 8.

4. Aus den in Definition D14.2 aufgeführten Gesetzen kann man die Gültigkeit aller weiteren Sätze herleiten, die wir in §2 und in §3 bereits bewiesen haben.
Wir setzen diese Sätze daher auch im folgenden für beliebige Vektorräume als gültig voraus. Darüber hinaus werden auch die Begriffe der **linearen Abhängigkeit** bzw. **Unabhängigkeit** in jedem Vektorraum so definiert, wie es oben in Definition D4.2 (auf Seite 48) geschehen ist. Auch die für diese Begriffe hergeleiteten Sätze gelten in jedem Vektorraum und werden daher im folgenden als gültig vorausgesetzt (Aufgabe 10 bis 13).

Übungen und Aufgaben

1. Zeige, daß für die im Lehrtext auf Seite 267 erklärte Addition von Funktionen die Gesetze K, A, N und I gelten!

2. Auf der Menge $C=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ aller reellen Zahlenpaare seien eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert:

$$(a|b)+(c|d)=(a+c|b+d) \quad \text{und} \quad r(a|b)=(ra|rb).$$

a) Zeige, daß das Gebilde $(C; +)$ eine kommutative Gruppe ist!
b) Zeige, daß die Menge C mit der angegebenen Addition und Multiplikation ein Vektorraum ist!

3. Auf der Menge $M=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\middle|\, a, b\in\mathbb{R}\right\}$ sei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen wie angegeben definiert. Untersuche, ob M mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum ist!

a) $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}$ und $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ra\\b\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+d\\b+c\end{pmatrix}$ und $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ra\\rb\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+d\\a+c\end{pmatrix}$ und $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}rb\\ra\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c+1\\b+d+1\end{pmatrix}$ und $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r(a+1)-1\\r(b+1)-1\end{pmatrix}$

4. Auf der Menge aller 2×2-Matrizen sei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}.$$

Untersuche, ob M mit diesen Verknüpfungen ein Vektorraum ist!

5. Auf der Menge P_n aller ganzrationalen Funktionen, deren Grad kleiner oder gleich n mit $n\in\mathbb{N}$ ist, sei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert, wie es im Lehrtext unter 1. für Funktionen erläutert ist.

a) Gib drei Elemente f, g und h aus P_4 an und bestimme $f+g$, $2f-g$ und $3f+1{,}5g-5h$!

b) Zeige, daß P_n mit den angegebenen Verknüpfungen ein Vektorraum ist!

6. Auf der Menge S aller reellen Zahlenfolgen sei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definiert durch:

$$\langle a_n\rangle + \langle b_n\rangle = \langle c_n\rangle \Leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \text{Für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt: } a_n+b_n=c_n;$$

$$r\langle a_n\rangle = \langle b_n\rangle \Leftrightarrow_{\mathrm{Df}} \text{Für alle } n\in\mathbb{N} \text{ gilt: } ra_n=b_n.$$

a) Gib drei Elemente $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ und $\langle c_n\rangle$ aus F an und bestimme $\langle a_n\rangle+\langle b_n\rangle$; $\langle b_n\rangle+\langle c_n\rangle$; $\langle a_n\rangle+\langle c_n\rangle$; $3\langle a_n\rangle$; $0{,}5\langle b_n\rangle$ und $(-1)\langle c_n\rangle$!

b) Zeige, daß S mit den angegebenen Verknüpfungen ein Vektorraum ist!

c) Untersuche, ob die Menge N aller Nullfolgen (die Menge Z aller Folgen, die den Grenzwert 2 haben) mit den angegebenen Verknüpfungen ein Vektorraum ist!

7. a) Zeige, daß die Sinusfunktion sin für alle $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $f(x)+f''(x)=0$ erfüllt!

b) Bestimme durch Probieren zwei weitere zweimal differenzierbare Funktionen, die ebenfalls für alle $x\in\mathbb{R}$ die angegebene Gleichung erfüllen!

c) Zeige, daß die Menge aller Funktionen, die für alle $x\in\mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen – mit dem im Lehrtext unter 1. angegebenen Verknüpfungen – ein Vektorraum ist!

8. Untersuche, ob man auf der Menge aller Geraden einer Ebene eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen so definieren kann, daß man einen Vektorraum erhält!

Anleitung: Benutze, daß sich jede Gerade der Ebene durch eine Gleichung der Form $ax+by+c=0$ darstellen läßt! Sei vorsichtig!

9. Zeige, daß in jedem reellen Vektorraum die folgenden Beziehungen gelten!

a) $r\vec{0}=\vec{0}$ **b)** $0\vec{a}=\vec{0}$ **c)** $(-r)\vec{a}=-(r\vec{a})$

d) $r\vec{a}=s\vec{a} \wedge \vec{a}\neq\vec{0} \Rightarrow r=s$ **e)** $r\vec{a}=r\vec{b} \wedge r\neq 0 \Rightarrow \vec{a}=\vec{b}$

10. C sei der in Aufgabe 2 behandelte Vektorraum.

a) Untersuche, ob der Vektor $(1|-1)$ aus den Vektoren $(2|0)$ und $(1|2)$ (aus den Vektoren $(2|3)$ und $(-2|-6)$) linear erzeugbar ist!

b) Gib zwei Vektoren aus C an, die voneinander linear unabhängig sind, und zwei, die voneinander linear abhängig sind!

c) Zeige, daß in C je drei Vektoren stets linear abhängig sind!

11. Untersuche, ob im Vektorraum aller 2×2-Matrizen (vgl. Aufgabe 4!) die folgenden Vektoren linear abhängig sind!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. P_n sei der Vektorraum aller ganzrationalen Funktionen, deren Grad kleiner oder gleich n ist (vgl. Aufgabe 5!).

a) Gib fünf Vektoren aus P_2 an!

b) Untersuche, ob die durch die folgenden Terme gegebenen Vektoren des P_2 voneinander linear abhängig sind!

$$f(x)=1; \quad g(x)=x+2; \quad h(x)=x^2-3; \quad j(x)=x^2-x+4$$

c) Untersuche, ob die durch die folgenden Terme gegebenen Vektoren des P_3 voneinander linear unabhängig sind!

$$f(x)=1-x; \quad g(x)=1+x; \quad h(x)=1-x^2; \quad j(x)=x^3-1$$

13. S sei der Vektorraum aller Zahlenfolgen (vgl. Aufgabe 6!).

a) Untersuche, ob die folgenden Vektoren aus S voneinander linear abhängig sind!
$\langle n \rangle$, $\langle n+1 \rangle$, $\langle n^2 \rangle$, $\langle n^2-2n+1 \rangle$

b) Ermittle drei linear unabhängige Vektoren, aus denen der Vektor $\langle n \rangle$ $\left(\text{der Vektor } \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle\right)$ linear erzeugbar ist!

c) Ermittle drei linear unabhängige Vektoren aus S! Was kann man vermuten über die Höchstzahl von linear unabhängigen Vektoren, die man S entnehmen kann?

II. Der Begriff des Erzeugnisses von Vektoren

1. In den Paragraphen 6, 7 und 13 haben wir uns bereits mit linearen Gleichungssystemen beschäftigt. Ein solches Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Variablen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = r_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = r_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = r_n \end{cases}$$

läßt sich als Vektorgleichung schreiben, wenn man die Zahlen a_{ik} und r_i zu Spaltenvektoren zusammenfaßt:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \ldots; \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{pmatrix}.$$

Die Vektorgleichung lautet dann: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{r}$.

Die Frage nach den Lösungen dieser Gleichung läßt sich folgendermaßen formulieren. Gehört der Vektor $\vec{r}$ zur Menge der Vektoren, die sich aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear erzeugen lassen? Diese Frage gibt uns Veranlassung, dieser Menge einen Namen zu geben. Wir definieren:

D 14.3 **Die Menge aller Linearkombinationen von n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ eines Vektorraumes V heißt das „Erzeugnis" dieser Vektoren; sie wird mit „$\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\rangle$" bezeichnet. Es gilt also:**

$$\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\rangle =_{Df} \{\vec{x} \mid \vec{x} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n \wedge c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

2. Wir behandeln einige **Beispiele:**

1) Das Erzeugnis $\langle\vec{a}\rangle$ eines ebenen oder räumlichen Vektors $\vec{a} \neq \vec{0}$ ist die Menge aller mit $\vec{a}$ kollinearen Vektoren.

2) Das Erzeugnis $\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle$ zweier linear **abhängiger** ebener oder räumlicher Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ist ebenfalls die Menge aller mit $\vec{a}_1$ (bzw. mit $\vec{a}_2$) kollinearen Vektoren. Begründe dies (Aufgabe 2a)!

3) Das Erzeugnis $\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle$ zweier linear **unabhängiger** ebener oder räumlicher Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ ist die Menge aller mit $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ komplanaren Vektoren.

4) Das Erzeugnis $\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\rangle$ dreier linear unabhängiger räumlicher Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ ist die Menge V_3 aller räumlichen Vektoren.

5) Zu bestimmen ist das Erzeugnis der Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt: $3\vec{a}_1 + (-2)\vec{a}_2 = 3\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+8 \\ 3+2 \\ 9-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_3$; die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind also voneinander linear abhängig. Daher ist $\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\rangle$ die Menge aller mit $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ komplanaren Vektoren.

6) Gegeben seien die Funktionen f_0, f_1, f_2 zu $f_0(x) = 1$; $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = x^2$. Das Erzeugnis $\langle f_0, f_1, f_2\rangle$ ist die Menge aller Funktionen f, die durch einen Term der Form $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ erfaßt werden (Aufgabe 3a).

Beachte, daß zu $\langle f_0, f_1, f_2\rangle$ auch alle linearen und alle konstanten Funktionen gehören!

7) Das Erzeugnis $\langle f_3, f_4, f_5\rangle$ der Funktionen zu $f_3(x) = 3$; $f_4(x) = 1 - 2x$ und $f_5(x) = 3 + 5x - x^2$ ist ebenfalls die Menge aller Funktionen f, die durch einen Term der Form $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ erfaßt werden (Aufgabe 3b).

3. Unser Ziel ist es, nachzuweisen, daß das Erzeugnis endlich vieler Vektoren eines Vektorraumes V ebenfalls einen Vektorraum bildet. In der Regel wird es sich dabei nicht um den vollständigen Vektorraum V, sondern um eine Teilmenge von V, um einen sogenannten **„Untervektorraum von V"** handeln. Wir definieren:

D 14.4 **Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraumes V heißt ein „Untervektorraum von V" genau dann, wenn U mit den für V erklärten Verknüpfungen der Addition und der S-Multiplikation wiederum einen Vektorraum bildet.**

Beispiele:

1) Die Menge aller Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ bildet einen Untervektorraum zum Vektorraum V_2 (Aufgabe 6).

2) Die Menge aller Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ bilden einen Untervektorraum zum Vektorraum V_3 (Aufgabe 7a).

4. Damit eine Teilmenge U eines Vektorraumes V ein Untervektorraum von V ist, muß zunächst einmal gelten, daß mit zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in U$ auch die Summe $\vec{a} + \vec{b}$ zu U gehört und daß mit jedem Element $\vec{a} \in U$ für jede reelle Zahl r auch $r\vec{a}$ zu U gehört. Man spricht bei diesen Eigenschaften einer Menge U von der **„Abgeschlossenheit“** bezüglich der Vektoraddition und bezüglich der S-Multiplikation.
Bemerkenswert ist nun, daß es bei der Frage, ob ein Untervektorraum vorliegt, genügt, zu überprüfen, ob U bezüglich der Vektoraddition und S-Multiplikation abgeschlossen ist. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so gelten in U auch alle anderen Vektorraumeigenschaften, weil sie im gegebenen Vektorraum V gelten.
Wir halten diesen Sachverhalt im folgenden Satz, dem **„Untervektorraumkriterium“** fest:

S 14.1 Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V ist schon dann ein Untervektorraum von V, wenn
1) für alle $\vec{a}, \vec{b} \in U$ auch gilt $\vec{a} + \vec{b} \in U$ und
2) für alle $\vec{a} \in U$ und alle $r \in \mathbb{R}$ auch gilt $r\vec{a} \in U$.

Beweis: Sind die Abgeschlossenheitsbedingungen 1) und 2) erfüllt, so gelten die Gesetze K, A, S_1, S_2, S_3 und S_4, weil sie in V gelten, selbstverständlich auch in U. Es ist aber nicht von vorneherein gesagt, daß das neutrale Element der Vektoraddition und mit jedem Element $\vec{a} \in U$ auch das inverse Element $-\vec{a}$ zu U gehört. Es ist also zu zeigen, daß in U auch die Gesetze N und I gelten.

Zu N: Für einen beliebigen Vektor $\vec{a} \in U$ gilt nach 2) wegen $0\vec{a} = \vec{0}$ auch $\vec{0} \in U$; also gehört auch der Nullvektor zu U.

Zu I: Für jeden Vektor $\vec{a} \in U$ gilt nach 2) wegen $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ auch $-\vec{a} \in U$; also gehört mit jedem Vektor $\vec{a}$ auch der Gegenvektor $-\vec{a}$ zu U.
Daher ist U ebenfalls ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, q.e.d.

5. Nun können wir zeigen:

S 14.2 Für beliebige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ eines Vektorraums V ist das Erzeugnis $E = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$ ein Untervektorraum von V.

Beweis: Wir zeigen, daß die Bedingungen von Satz S 14.1 erfüllt sind.

Zu 1): Es sei $\vec{a}, \vec{b} \in E$, also $\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + \dots + r_n\vec{a}_n$ und $b = s_1\vec{a}_1 + \dots + s_n\vec{a}_n$; daraus folgt:

$$\vec{a} + \vec{b} = (r_1 + s_1)\vec{a}_1 + \dots + (r_n + s_n)\vec{a}_n, \text{ also } \vec{a} + \vec{b} \in E.$$

Zu 2): Es sei $\vec{a} \in E$, also $\vec{a} = r_1\vec{a}_1 + \dots + r_n\vec{a}_n$; daraus folgt für jede Zahl $r \in \mathbb{R}$:

$$r\vec{a} = (r r_1)\vec{a}_1 + \dots + (r r_n)\vec{a}_n, \text{ also auch } r\vec{a} \in E, \text{ q.e.d.}$$

Übungen und Aufgaben

1. Bestimme das Erzeugnis der angegebenen Vektoren!

a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1{,}5\\4{,}5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1{,}7\\5{,}1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1{,}9\\5{,}7\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}8\\4\\2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}32\\8\\2\\0{,}5\end{pmatrix}$ **h)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **i)** $\begin{pmatrix}1\\4\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\8\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\9\\16\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\8\\27\\64\end{pmatrix}$

2. a) Zeige, daß das Erzeugnis von zwei linear abhängigen Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ die Menge aller mit $\vec{a}_1$ kollinearen Vektoren ist!
b) Formuliere und begründe eine entsprechende Aussage für drei linear abhängige Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$!

3. a) Zeige: Das Erzeugnis $\langle f_0, f_1, f_2\rangle$ der Funktionen zu $f_0(x)=1$; $f_1(x)=x$ und $f_2(x)=x^2$ ist die Menge P_2 aller ganzrationalen Funktionen, deren Grad kleiner oder gleich 2 ist!
b) Zeige, daß das Erzeugnis $\langle f_3, f_4, f_5\rangle$ der Funktionen zu $f_3(x)=3$; $f_4(x)=1-2x$ und $f_5(x)=3+5x-x^2$ ebenfalls P_2 ist!

4. Bestimme das Erzeugnis der Funktionen zu den angegebenen Termen!
a) $f_1(x)=1;\quad f_2(x)=x^2;\quad f_3(x)=x^3$
b) $f_1(x)=x;\quad f_2(x)=1-x;\quad f_3(x)=1+x^2$
c) $f_1(x)=1;\quad f_2(x)=x^2;\quad f_3(x)=x^4$
d) $f_1(x)=x;\quad f_2(x)=x+x^3;\quad f_3(x)=x+x^3+x^5$

5. a) Zeige: Gilt $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$, so sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ voneinander linear abhängig.
b) Untersuche, welche Folgerung über $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle=\langle\vec{d},\vec{e}\rangle$ gezogen werden kann! Begründe deine Aussage ausführlich!

6. Zeige, daß die Menge aller Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ mit $a\in\mathbb{R}$ einen Untervektorraum des Vektorraumes V_2 bildet!

7. a) Zeige, daß die Menge A aller Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\0\end{pmatrix}$ mit $a_1, a_2\in\mathbb{R}$ einen Untervektorraum des Vektorraumes V_3 bildet!
b) Zeige, daß auch die Menge B aller Vektoren $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}$ mit $b_1, b_2\in\mathbb{R}$ einen Untervektorraum von V_3 bildet!
c) Untersuche, ob die Menge $A\cup B$ einen Untervektorraum von V_3 bildet!
d) Untersuche, ob die Menge $A\cap B$ einen Untervektorraum von V_3 bildet!
e) Interpretiere deine Ergebnisse aus a), b), c) und d) geometrisch!

8. Untersuche, ob die Menge U einen Untervektorraum des V_3 bildet? Gib gegebenenfalls eine geometrische Interpretation dieses Sachverhaltes!

a) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_1=1\right\}$ **b)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_1=x_2\right\}$ **c)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_1-x_2+x_3=0\right\}$

d) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, 5x_1-7x_3+35=0\right\}$ **e)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, 2x_1-5x_2=0 \vee 7x_2+x_3=0\right\}$

f) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, x_1\cdot x_2\cdot x_3=0\right\}$ **g)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\middle|\, 2x_1-5x_2=0 \wedge 7x_2+x_3=0\right\}$

9. Es sei $\vec{a}$ ein Vektor des V_3.
a) Zeige, daß die Menge $U=\{\vec{x}\in V_3 \,|\, |\vec{x}-\vec{a}|=|\vec{x}+\vec{a}|\}$ einen Untervektorraum des V_3 bildet!
b) Begründe die Aussage von a) geometrisch!

10. a) U sei ein Untervektorraum des Vektorraumes V_2, und es gelte $\emptyset \neq U \neq V_2$. Zeige, daß U geometrisch als Ursprungsgerade gedeutet werden kann!
b) Formuliere und beweise einen entsprechenden Satz für die Untervektorräume des Vektorraumes V_3!

11. a) Zeige, daß die Menge aller auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen einen Untervektorraum des Vektorraumes F aller auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen bildet!
b) Gib zwei weitere Untervektorräume von F an!

12. Gib jeweils zwei Untervektorräume an zum Vektorraum
a) P_n aller ganzrationalen Funktionen vom Gerade kleiner oder gleich n;
b) P aller ganzrationalen Funktionen;
c) K aller konvergenten Folgen;
d) B aller beschränkten Folgen;
e) M aller 2×2-Matrizen!

III. Basis und Dimension eines Vektorraums

1. Die Definition D 14.3 besagt, daß man jeden Vektor $\vec{b}$, der zum Erzeugnis $\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\rangle$ von k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ gehört, aus diesen Vektoren linear erzeugen kann. Wir definieren:

D 14.5 **Eine Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ heißt ein „Erzeugendensystem eines Vektorraums V" genau dann, wenn gilt:**

$$\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\rangle = V,$$

wenn also jeder Vektor $\vec{b}\in V$ aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ erzeugbar ist.

Beachte, daß es nicht zu jedem Vektorraum V ein solches **endliches** Erzeugendensystem gibt! Zum Beispiel besitzt der Vektorraum aller Polynome kein **endliches** Erzeugendensystem (Aufgabe 9).

Beispiele:

1) Jeder ebene Vektor ($\vec{b} \in V_2$) läßt sich aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ linear erzeugen. Ist nämlich $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ ein solcher Vektor, so ergibt sich aus $\vec{b} = r_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, also $b_1 = r_1 + r_2 \wedge b_2 = r_2$ unmittelbar: $r_2 = b_2$ und $r_1 = b_1 - b_2$.
Probe: $(b_1 - b_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1 - b_2 + b_2\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \vec{b}$.
Also ist die Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums V_2.

2) Jeder ebene Vektor ($\vec{b} \in V_2$) läßt sich auch aus den drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ linear erzeugen. Ist $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, so gilt z.B.

$$\frac{b_1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{b_1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2}\\[4pt] \frac{b_1}{2} - \frac{b_1}{2} + b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \vec{b}.$$

Also ist auch $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums V_2. Allerdings ist die Darstellung eines Vektors $\vec{b} \in V_2$ in diesem Fall nicht eindeutig.
Eine andere Möglichkeit ist z.B.

$$2b_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-b_1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (b_2 - 3b_1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2b_1 - b_1\\ 2b_1 + b_1 + b_2 - 3b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \vec{b}.$$

Der Grund hierfür ist, daß die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear abhängig sind.

3) Jeder räumliche Vektor ($\vec{b} \in V_3$) läßt sich aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ linear erzeugen. Der Nachweis hierfür soll in Aufgabe 1a) erbracht werden. Also ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums V_3.

2. Wie das zweite Beispiel zeigt, kann es sein, daß die Vektoren eines Erzeugendensystems eines Vektorraums V linear abhängig sind. Da sich in einem solchen Fall wenigstens einer der Vektoren aus den anderen linear erzeugen läßt, kann man das Erzeugendensystem um diesen Vektor reduzieren, ohne daß die Eigenschaft, ein Erzeugendensystem zu sein, dabei verloren geht.
Es gilt der Satz:

S14.3 **Läßt man aus einem Erzeugendensystem $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k\}$ eines Vektorraums V einen Vektor weg, der sich aus den übrigen erzeugen läßt, so bildet die Menge der restlichen Vektoren ebenfalls ein Erzeugendensystem von V.**

Beweis: Es sei z.B. der Vektor $\vec{a}_k$ aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1}$ erzeugbar:

$$\vec{a}_k = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_{k-1}\vec{a}_{k-1}.$$

Ist $\vec{b}$ ein beliebiger Vektor aus V, gilt also

$$\vec{b} = s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_{k-1}\vec{a}_{k-1} + s_k\vec{a}_k,$$

so ergibt sich durch Einsetzen der Darstellung für $\vec{a}_k$:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \ldots + s_{k-1}\vec{a}_{k-1} + s_k(r_1\vec{a}_1 + \ldots + r_{k-1}\vec{a}_{k-1})\\ &= (s_1 + s_k r_1)\vec{a}_1 + (s_2 + s_k r_2)\vec{a}_2 + \ldots + (s_{k-1} + s_k r_{k-1})\vec{a}_{k-1},\end{aligned}$$

d.h. $\vec{b}$ ist auch aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{k-1}$ erzeugbar.
Entsprechend kann man mit jedem anderen Vektor $\vec{a}_i$ verfahren, der aus den restlichen erzeugbar ist, q.e.d.

3. Wenn ein Vektorraum V ein endliches Erzeugendensystem besitzt, so läßt sich dieses auf die geschilderte Weise soweit reduzieren, daß die Vektoren des verbleibenden Erzeugendensystem linear unabhängig sind. Wir sehen dabei allerdings von dem (trivialen) Sonderfall des Vektorraums ab, der nur aus dem Nullvektor besteht, dem sogenannten „Nullraum" $\{\vec{0}\}$. Wir definieren:

D 14.6 Ein aus linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ bestehendes Erzeugendensystem eines Vektorraums V heißt eine „Basis von V".

Bemerkung: Aus dieser Definition folgt **nicht,** daß jeder Vektorraum V eine solche **endliche Basis** besitzt. Ein Gegenbeispiel ist der Vektorraum der Polynome (Aufgabe 9).

Beispiele:

1) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums V_2; denn sie sind linear unabhängig und $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2\}$ ist ein Erzeugendensystem von V_2.

2) Auch die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums V_2 (Aufgabe 2a).

3) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des Vektorraums V_3 (Aufgabe 1b).

4. Nach den vorstehenden Überlegungen ist klar, daß eine Basis keine „überflüssigen" Vektoren mehr enthält.
Es gilt der Satz

S 14.4 Wenn aus einer Basis eines Vektorraumes V ein Vektor weggelassen wird, so bilden die restlichen Vektoren kein Erzeugendensystem von V.

Der Beweis soll in Aufgabe 10a geführt werden.

5. Aus Definition D 14.6 folgt nun unmittelbar die Gültigkeit des Satzes

S 14.5 **Ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V, so ist jeder Vektor $\vec{b} \in V$ aus den Basisvektoren nur auf eine Weise erzeugbar: $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n$.**

Der Beweis soll in Aufgabe 10c geführt werden.

Falls V nicht der Nullraum ist, gilt auch die Umkehrung von Satz S 14.5:

S 14.6 **Falls V nicht der Nullraum $\{\vec{0}\}$ ist und jeder Vektor $\vec{b} \in V$ aus den Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ auf genau eine Weise erzeugbar ist, stellt $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V dar.**

Beweis: Daß $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, ergibt sich unmittelbar aus der Voraussetzung, daß jeder Vektor $\vec{b} \in V$ aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erzeugt werden kann. Es bleibt nur zu zeigen, daß die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind.
Wir nehmen an, dies sei nicht der Fall. Dann müßte es einen Vektor $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ geben z.B. den Vektor $\vec{a}_n$, der aus den übrigen erzeugbar ist:

$$\vec{a}_n = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_{n-1}\vec{a}_{n-1}.$$

Da außerdem gilt:

$$\vec{a}_n = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \ldots + 0\vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n,$$

wäre der Vektor $\vec{a}_n$ im Widerspruch zur Voraussetzung auf mehrfache Weise aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erzeugbar, q.e.d.

Beachte, daß der Vektor $\vec{a}_n$ ein Vektor aus V ist, daß also auch von ihm vorausgesetzt ist, daß er aus den Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ auf genau eine Weise erzeugbar ist!

5. In §4 haben wir begründet, daß der Raum R_2 von zwei, der Raum R_3 von drei linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. Jede Basis des Raumes R_2 hat also zwei, jede Basis des R_3 drei Vektoren.
Man kann daher folgendes vermuten: wenn ein Vektorraum V zwei endliche Basen B_1 und B_2 besitzt, dann enthalten beide Basen gleichviele Vektoren. Es ist unser Ziel diesen wichtigen Satz zu beweisen.
Wir überlegen dazu zunächst, wie man aus einer Basis B_1 eines Vektorraums eine andere Basis B_2 konstruieren kann.
Wir können z.B. in der Basis $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ des V_2, die aus den Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ besteht, den Vektor $\vec{a}_2$ durch jeden Vektor $\vec{b}$ ersetzen, zu dessen Erzeugung der Vektor $\vec{a}_2$ benötigt wird, also z.B. durch den Vektor

$$\vec{b} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß dann auch $\{\vec{a}_1, \vec{b}\}$ eine Basis des R_2 ist, daß also jeder Vektor $\vec{c} \in V_2$ aus $\vec{a}_1$ und $\vec{b}$ erzeugbar ist: $\vec{c} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{b}$.

Zum **Beispiel** gilt für den Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (Bild 14.1):

$$\vec{c}=2\vec{a}_1+\vec{b}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Dagegen wäre $\{\vec{a}_1, \vec{b}_1\}$ mit

$$\vec{b}_1=2\vec{a}_1+0\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$$

keine Basis des Vektorraums V_2. Begründe dies (Aufgabe 11a)!

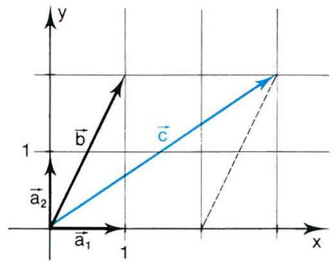


Bild 14.1

Allgemein gilt der wichtige **„Austauschsatz von Steinitz"**:

S14.7 **Ist $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V und gilt für einen Vektor $\vec{b}\in V$: $\quad \vec{b}=r_1\vec{a}_1+\ldots+r_k\vec{a}_k+\ldots+r_n\vec{a}_n$ mit $r_k \neq 0$,**

so ist auch $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{b}, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis von V.

Wir führen den **Beweis** für den Fall, daß $k=1$ und somit $r_1 \neq 0$ ist. Alle anderen Fälle sind entsprechend zu behandeln. Man kann alle anderen Fälle auch auf den hier behandelten durch Umbenennung der Basisvektoren zurückführen.

Wir haben zu zeigen, daß die neuen Vektoren

1) linear unabhängig sind und

2) ein Erzeugendensystem von V bilden, daß also jeder Vektor $\vec{c}\in V$ aus ihnen erzeugt werden kann.

Zu 1): Es sei $s_1\vec{b}+s_2\vec{a}_2+\ldots+s_n\vec{a}_n=\vec{0}$; wir haben zu zeigen, daß dann $s_1=s_2=\ldots=s_n=0$ ist. Nun gilt:

$$s_1(r_1\vec{a}_1+\ldots+r_n\vec{a}_n)+s_2\vec{a}_2+\ldots+s_n\vec{a}_n=\vec{0}$$

$$\Rightarrow (s_1r_1)\vec{a}_1+(s_1r_2+s_2)\vec{a}_2+\ldots+(s_1r_n+s_n)\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Weil die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ linear unabhängig sind, muß gelten:

$$s_1r_1=0 \wedge s_1r_2+s_2=0 \wedge \ldots \wedge s_1r_n+s_n=0.$$

Nach Voraussetzung ist ferner $r_1 \neq 0$; somit ergibt sich: $\quad s_1=s_2=\ldots=s_n=0$,

d.h. $\vec{b}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ sind linear unabhängig.

Zu 2): Wegen $r_1 \neq 0$ gilt:

$$\vec{b}=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\ldots+r_n\vec{a}_n \quad\Rightarrow\quad \vec{a}_1=\frac{1}{r_1}(\vec{b}-r_2\vec{a}_2-\ldots-r_n\vec{a}_n).$$

Es sei nun $\vec{c}$ ein beliebiger Vektor aus V, also: $\vec{c}=t_1\vec{a}_1+t_2\vec{a}_2+\ldots+t_n\vec{a}_n$.

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\vec{c}=\frac{t_1}{r_1}(\vec{b}-r_2\vec{a}_2-\ldots-r_n\vec{a}_n)+t_2\vec{a}_2+\ldots+t_n\vec{a}_n$$

$$=\frac{t_1}{r_1}\vec{b}+\left(t_2-\frac{t_1}{r_1}r_2\right)\vec{a}_2+\ldots+\left(t_n-\frac{t_1}{r_1}r_n\right)\vec{a}_n,$$

d.h. $\vec{c}$ ist aus $\vec{b}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ erzeugbar, q.e.d.

6. Nunmehr können wir beweisen

S 14.8 Ist $A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis eines Vektorraums V und besteht eine Menge $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\}$ aus linear unabhängigen Vektoren von V, so ist $m \leqq n$.

Beweis: Wir nehmen – entgegen der Behauptung – an, es sei $m>n$. Wir wollen einen Widerspruch dadurch konstruieren, daß wir die Vektoren von A nach Satz S 14.7 der Reihe nach durch die Vektoren von B ersetzen. Es ergibt sich dann, daß die Vektoren von B – entgegen der Voraussetzung – nicht linear unabhängig sein können.

1) Für den Vektor $\vec{b}_1$ gilt: $\vec{b}_1=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\ldots+r_n\vec{a}_n$.
Dabei ist wenigstens eine der Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$ von 0 verschieden, weil sonst $\vec{b}_1=\vec{0}$ und die Vektoren von B nicht linear unabhängig wären. Es sei $r_1 \neq 0$. (Alle anderen Fälle können entsprechend behandelt oder durch Umbenennung der Vektoren auf diesen Fall zurückgeführt werden.) Dann ist nach Satz S 14.7 auch $\{\vec{b}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis von V.

2) Für den Vektor $\vec{b}_2$ gilt dann: $\vec{b}_2=s_1\vec{b}_1+s_2\vec{a}_2+\ldots+s_n\vec{a}_n$. Wäre $s_2=s_3=\ldots=s_n=0$, so wäre $\vec{b}_2=s_1\vec{b}_1$; die Vektoren von B wären dann nicht linear unabhängig. Ist z.B. $s_2 \neq 0$, dann ist nach Satz S 14.7 auch $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n\}$ eine Basis von V.
(Alle anderen Fälle, z.B. $s_3 \neq 0$, sind entsprechend zu behandeln oder durch Umbenennung der Vektoren auf den behandelten Fall zurückzuführen.)
Durch Fortsetzung dieses Verfahrens können wir Schritt für Schritt jeweils einen weiteren Vektor von A durch einen solchen aus B ersetzen. Im vorletzten Schritt ergibt sich, daß z.B. auch $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_{n-1}, \vec{a}_n\}$ eine Basis von V ist. Dann gilt für den Vektor $\vec{b}_n$:

$$\vec{b}_n=u_1\vec{b}_1+\ldots+u_{n-1}\vec{b}_{n-1}+u_n\vec{a}_n.$$

Wäre $u_n=0$, so könnte $\vec{b}_n$ aus $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_{n-1}$ erzeugt werden; die Vektoren von B wären also nicht linear unabhängig; also ist $u_n \neq 0$ und nach Satz 14.7 auch $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V.
Dann ist wegen $m>n$ der Vektor $\vec{b}_m$ aus $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ erzeugbar:

$$\vec{b}_m=v_1\vec{b}_1+v_2\vec{b}_2+\ldots+v_n\vec{b}_n;$$

die Vektoren von B wären also nicht linear unabhängig. Damit ist der Widerspruch konstruiert, q.e.d.

7. Aus Satz S 14.8 ergibt sich nun unmittelbar die Gültigkeit des Satzes

S 14.9 Sind $A=\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ und $B=\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\}$ zwei Basen eines Vektorraums V, so ist $n=m$.

Beweis: Da jede Basis aus linear unabhängigen Vektoren besteht, muß nach Satz S 14.8 sowohl $m \leq n$ als auch $n \geq m$ sein; also ist $n=m$, q.e.d.
Aufgrund von Satz S 14.9 definieren wir:

D 14.7 Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis, so heißt die allen Basen von V gemeinsame Anzahl n von Vektoren die „Dimension von V“, in Zeichen „dim V“.

Beispiele:

1) Eine Basis des Vektorraums V_2 ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$; daher gilt: $\dim V_2 = 2$.

2) Eine Basis des Vektorraums V_3 ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$; daher gilt: $\dim V_3 = 3$.

3) Entsprechend gilt für den Vektorraum V_n: $\dim V_n = n$.

Bemerkung: Mit Hilfe des Begriffs der Dimension kann man den Inhalt von Satz S 14.8 auch folgendermaßen erfassen:

S 14.10 Hat ein Vektorraum V die Dimension n, so kann man ihm höchstens n linear unabhängige Vektoren entnehmen.

8. In §4 haben wir gezeigt, daß zwei **beliebige** linear unabhängige Vektoren den Raum R_2, drei **beliebige** linear unabhängige Vektoren den Raum R_3 aufspannen. Man kann daher vermuten, daß jede Menge $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$, die aus n linear unabhängigen Vektoren eines n-dimensionalen Vektorraums V besteht, eine Basis dieses Vektorraums darstellt. In der Tat gilt der Satz

S 14.11 Sind n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ eines n-dimensionalen Vektorraums V linear unabhängig, so ist $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ eine Basis von V.

Beweis: Wir nehmen an, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sei keine Basis von V. Dann müßte es einen Vektor $\vec{b} \in V$ geben, der **nicht** aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ erzeugbar wäre. Dann aber wären die $n+1$ Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b} \in V$$

ebenfalls linear unabhängig. Dem Vektorraum V könnte man also mehr als n linear unabhängige Vektoren entnehmen, was nach Satz S 14.10 nicht möglich ist, q.e.d.

Übungen und Aufgaben

1. Zeige, daß die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem des Vektorraums V_3 bilden!

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

2. Zeige, daß die angegebenen Vektoren eine Basis des V_2 bilden!

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

3. Ergänze die angegebenen Vektoren zu einer Basis des V_3!

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}$

4. Zeige, daß die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem des V_3 bilden! Streiche dann Vektoren so weg, daß die restlichen eine Basis des V_3 bilden. Wie viele Möglichkeiten zu streichen gibt es?

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\8\\27\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\16\\81\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\8\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\5\\10\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

5. Bestimme eine Basis des Vektorraums M aller 2×2-Matrizen (vgl. Aufgabe 4 auf Seite 270!)!

6. Zeige, daß U ein Untervektorraum des V_4 ist, und ermittle eine Basis von U!

a) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1=0\right\}$ **b)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1=2x_2\right\}$ **c)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| 2x_1-x_3+2x_4=0\right\}$

d) $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1+x_2=x_3+x_4\right\}$ **e)** $U=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\middle| x_1=-x_2 \wedge x_3=-x_4\right\}$

7. a) Zeige: Sind f_0 eine konstante, f_1 eine lineare und f_2 eine quadratische Funktion, so bilden f_0, f_1 und f_2 eine Basis des Vektorraums P_2 aller ganzrationalen Funktionen vom Grade kleiner oder gleich 2, falls f_0 nicht die Nullfunktion ist.

b) Untersuche, ob jede Basis des P_2 eine konstante, eine lineare und eine quadratische Funktion enthält!

8. Bestimme eine Basis des Vektorraums P_n aller ganzrationalen Funktionen vom Grade kleiner oder gleich n!

9. Zeige mit einem Widerspruchsbeweis, daß der Vektorraum P aller ganzrationalen Funktionen keine endliche Basis besitzt!

10. a) Beweise Satz S 14.4!

b) Formuliere und beweise einen entsprechenden Satz für den Fall, daß zu einer Basis eines Vektorraums V ein Vektor hinzugenommen wird!

c) Beweise Satz S 14.5!

11. a) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des V_2. Zeige: Ist $\vec{b} \in V_2$ ein Vektor mit $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2$ (mit $r_1 \in \mathbb{R}$ und $r_2 \in \mathbb{R}^{\neq 0}$), so bilden auch die Vektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{b}_1$ eine Basis von V_2. Begründe, daß dies für $r_2 = 0$ nicht gilt!

b) Die Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des V_3. Zeige: Ist $\vec{b} \in V_3$ ein Vektor mit $\vec{b} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + r_3\vec{a}_3$ (mit r_1, $r_3 \in \mathbb{R}$ und $r_2 \in \mathbb{R}^{\neq 0}$), so bilden auch die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{b}$, $\vec{a}_3$ eine Basis des V_3.

12. Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ bilden eine Basis des V_4. Ermittle mit Hilfe des Satzes S 14.7 drei weitere Basen des V_4!

13. Zeige mit Hilfe des Satzes S 14.7, daß die folgenden Vektoren eine Basis des V_4 bilden!

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\5\\6\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}$

14. Bestimme die Dimension der folgenden Untervektorräume des V_5!

a) $\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ **b)** $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\\6\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\\7\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\\8\end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\4\\9\\16\\25\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\8\\27\\64\\125\end{pmatrix} \right\rangle$ **d)** $\left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} \middle| \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \right\}$

15. Zeige, daß der Vektorraum N aller Nullfolgen (vgl. Aufgabe 6c Seite 270!) keine endliche Basis besitzt!

IV. Zu den Umformungen des Gaußverfahrens

1. In den Paragraphen 6, 7 und 13 haben wir das Gaußverfahren zur Bestimmung der Lösungen eines linearen Gleichungssystems besprochen und bei zahlreichen Beispielen angewendet. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Frage offengeblieben, ob die beim Gaußverfahren durchzuführenden Zeilenumformungen den Rang der betreffenden Matrizen unverändert lassen. Mit Hilfe der Begriffe und der Sätze, die wir in den vorhergehenden Abschnitten dargestellt haben, können wir diese Frage jetzt beantworten.

2. In Definition D13.1 haben wir den Zeilenrang einer Matrix M definiert als die Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren der Matrix M (Seite 250). Zu einer Matrix von m Zeilen und n Spalten

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

gehören die Zeilenvektoren $\vec{g}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ (für $i=1, 2, \ldots, m$).

Da jeder dieser Vektoren n Koordinaten besitzt, ist er ein Element des Vektorraums V_n; es gilt $\vec{g}_i \in V_n$ (für $i=1, 2, \ldots, m$).
Das Erzeugnis $\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle$ dieser Vektoren ist nach Satz S14.2 ein Vektorraum, und zwar ein Untervektorraum des n-dimensionalen Vektorraums V_n.
Daher besitzt der von den Vektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m$ aufgespannte Vektorraum auf jeden Fall eine endliche Basis, also auch eine (endliche) Dimension. Gilt nun

$$\dim\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle = r \qquad (\text{mit } r \leq n;\ r \leq m),$$

so bedeutet dies nach Satz S14.9, daß **jede** Basis von $\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle$ genau r linear unabhängige Vektoren enthält und daß nach Satz S14.10 diese Zahl r die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der Matrix angibt. Demnach stellt die Zahl r nach Definition D13.1 den **Zeilenrang** der Matrix M dar: $rg_z M = r$. Es gilt der Satz:

S14.12 Besteht eine Matrix M aus den Zeilenvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m$, so gilt

$$\mathbf{rg_Z M = \dim\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle.}$$

Beachte: Mit den vorstehenden Überlegungen ist sichergestellt, daß es bei der Bestimmung des Zeilenrangs einer Matrix M nicht darauf ankommt, **welche** Zeilenvektoren aus der Matrix M ausgewählt werden, sofern diese Vektoren nur linear unabhängig sind. Mit anderen Worten: **jede** Teilmenge der Menge $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m\}$, die aus linear unabhängigen Vektoren besteht und die bei Hinzunahme **jedes** weiteren Zeilenvektors zu einer Menge abhängiger Vektoren führt, enthält die **gleiche** Anzahl von Vektoren, nämlich so viele, wie die Dimension von $\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle$ angibt.

3. Wir können nun beweisen, daß die Umformungen des Gaußverfahrens den Zeilenrang einer Matrix nicht ändern.
Wir formulieren diese Umformungen für die Zeilenvektoren der betreffenden Matrix (vergleiche Seite 103!):

$\boxed{1}$ **Vertauschen zweier Zeilenvektoren;**

$\boxed{2}$ **Multiplikation eines Zeilenvektors mit einer von Null verschiedenen Zahl;**

$\boxed{3}$ **Ersetzen eines Zeilenvektors durch die Summe aus diesem Vektor und einem anderen Zeilenvektor.**

Zu $\boxed{1}$: Es ist unmittelbar einsichtig, daß der Austausch zweier Zeilenvektoren die Dimension von $\langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle$, also den Zeilenrang der Matrix nicht ändert.

Zu $\boxed{2}$: Wir ersetzen einen Vektor $\vec{g}_k$ durch den Vektor $\vec{g}_k{}' = c\vec{g}_k$ (mit $c \neq 0$ und $k = 1, 2, \ldots, m$). Zu zeigen ist, daß für die Erzeugnisse

$$E = \langle \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k, \ldots, \vec{g}_m \rangle \quad \text{und} \quad E' = \langle \vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k{}', \ldots, \vec{g}_m \rangle \quad \text{gilt: } E = E'.$$

Es sei $\vec{a} \in E'$, also $\vec{a} = r_1 \vec{g}_1 + \ldots + r_k \vec{g}_k{}' + \ldots + r_m \vec{g}_m$; dann gilt:

$$\vec{a} = r_1 \vec{g}_1 + \ldots + r_k (c\vec{g}_k) + \ldots + r_m \vec{g}_m = r_1 \vec{g}_1 + \ldots + (c r_k) \vec{g}_k + \ldots + r_m \vec{g}_m.$$

Somit gilt auch $\vec{a} \in E'$, also $E' \subseteq E$.

Wegen $c \neq 0$ gilt $\vec{g}_k = \frac{1}{c} \vec{g}_k{}'$; daher kann man auf die gleiche Weise auch zeigen, daß aus $\vec{b} \in E$ folgt $b \in E'$, also $E \subseteq E'$.

Aus $E' \subseteq E$ und $E \subseteq E'$ ergibt sich aber $E = E'$, q.e.d.

Zu $\boxed{3}$: Wir ersetzen z.B. den Vektor $\vec{g}_1$ durch den Vektor $\vec{g}_1{}' = \vec{g}_1 + \vec{g}_k$ (mit $k = 2, 3, \ldots, m$). Zu zeigen ist wiederum, daß für die Erzeugnisse

$$E = \langle \vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle \text{ und } E' = \langle \vec{g}_1{}', \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_m \rangle \quad \text{gilt: } \quad E = E'.$$

1) Es sei $\vec{a} \in E'$, also $\vec{a} = r_1 \vec{g}_1{}' + r_2 \vec{g}_2 + \ldots + r_m \vec{g}_m$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= r_1 (\vec{g}_1 + \vec{g}_k) + r_2 \vec{g}_2 + \ldots + r_k \vec{g}_k + \ldots + r_m \vec{g}_m \\ &= r_1 \vec{g}_1 + r_2 \vec{g}_2 + \ldots + (r_1 + r_k) \vec{g}_k + \ldots + r_m \vec{g}_m. \end{aligned}$$

Somit gilt auch $\vec{a} \in E$, also $E' \subseteq E$.

2) Ferner gilt: $\vec{g}_1{}' = \vec{g}_1 + \vec{g}_k \;\Rightarrow\; \vec{g}_1 = \vec{g}_1{}' - \vec{g}_k$.

Es sei $\vec{b} \in E$, also $\vec{b} = s_1 \vec{g}_1 + \ldots + s_k \vec{g}_k + \ldots + s_m \vec{g}_m$; dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= s_1 (\vec{g}_1{}' - \vec{g}_k) + \ldots + s_k \vec{g}_k + \ldots + s_m \vec{g}_m \\ &= s_1 \vec{g}_1{}' + \ldots + (s_k - s_1) \vec{g}_k + \ldots + s_m \vec{g}_m. \end{aligned}$$

Somit gilt auch $\vec{b} \in E'$, also $E \subseteq E'$.

Aus $E' \subseteq E$ und $E \subseteq E'$ ergibt sich auch in diesem Fall $E = E'$.

Genau entsprechend kann man schließen, wenn ein anderer Zeilenvektor von M, etwa der Vektor $\vec{g}_i$, durch eine Linearkombination der Form

$$\vec{g}_i{}' = \vec{g}_i + \vec{g}_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m \text{ mit } i \neq k)$$

ersetzt wird.

Bemerkung: Man kann jeden anderen Fall auch durch Umbenennung der Zeilenvektoren auf den hier behandelten zurückführen.
Somit gilt bei beiden Umformungsarten:

$$E = E', \text{ also auch } \dim E = \dim E'$$

und somit $\operatorname{rg}_z M = \operatorname{rg}_z M'$, q.e.d.

Damit haben wir bewiesen:

S 14.13 Die beim Gaußverfahren durchzuführenden Zeilenumformungen lassen den Zeilenrang einer Matrix M unverändert.

Beachte, daß wir beim Beweis von Satz S 14.13 keinen Gebrauch gemacht haben von Sätzen, die wir in §13 bereits unter Verwendung dieses Satzes hergeleitet haben!

Bemerkung: Bei der Durchführung des Gaußverfahrens werden die Umformungsarten $\boxed{2}$ und $\boxed{3}$ meistens zu **einer** Umformung zusammengefaßt nach der Gleichung

$$\vec{g}_i{}' = a\vec{g}_i + b\vec{g}_k \quad \text{(mit } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0;\ i, k = 1, 2, \ldots, m \text{ und } i \neq k).$$

Ist $b=0$, so handelt es sich um die Multiplikation der i-ten Zeile mit dem Faktor $a \neq 0$, also um eine Umformung der Art $\boxed{2}$.
Ist $a=b=1$, so handelt es sich um die Addition zweier Zeilen, also um eine Umformung der Art $\boxed{3}$.
Man kann die beiden Teile des Beweises zusammenfassen, wenn man diese Gleichung benutzt (Aufgabe 3).

Übungen und Aufgaben

1. a) Zeige, daß ein lineares Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn der Spaltenrang der zugehörigen Matrix gleich dem Spaltenrang der zugehörigen erweiterten Matrix ist!

Anleitung: Vergleiche die Dimensionen der Erzeugnisse der Spaltenvektoren dieser beiden Matrizen!

b) Zeige, daß ein lösbares lineares Gleichungssystem mit n Variablen genau dann eindeutig lösbar ist, wenn der Spaltenrang der zugehörigen Matrix gleich n ist!

Anleitung: Wende den Satz S 14.5 an!

2. Zeige, ohne die Sätze aus §13 zu benutzen, daß sich der Spaltenrang einer Matrix bei den angegebenen Umformungen nicht ändert!

a) Vertauschen zweier Zeilenvektoren

b) Multiplizieren eines Zeilenvektors mit einer von Null verschiedenen Zahl

c) Ersetzen eines Zeilenvektors durch die Summe aus diesem Vektor und einem anderen Zeilenvektor

Anleitung: Vergleiche jeweils die Dimension der Erzeugnisse der Spaltenvektoren der ursprünglichen und der umgeformten Matrix!

3. Führe den Beweis von Satz S 14.13 mit Hilfe der Umformungsgleichung $\vec{g}_i{}' = a\vec{g}_i + b\vec{g}_k$ (für $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0;\ i, k = 1, 2, \ldots, m$ und $i \neq k$)!